TD n° 9 : Réduction des endomorphismes (3)

Exercice 1

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \\ u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \end{cases}.$$

Exercice 2

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

2. Déterminer le terme général des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 3v_n \end{cases}$.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A(A - I_n)^2 = 0$, $(A - I_n)^2 \neq 0$ et $A(A - I_n) \neq 0$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont 0 et 1.
2. Établir que A n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k s'exprime à l'aide de A et A^2.

Exercice 4

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3$. A est-elle diagonalisable ?

b) A est-elle inversible ? Si oui, déterminer A^{-1}.

Exercice 5

Soient deux réels a et b strictement positifs. On pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire l'expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour quelles valeurs de a et b, M est-elle diagonalisable ?

Exercice 6

1. Montrer que l'endomorphisme $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}$ est une symétrie.

2. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de u ? u est-il diagonalisable ?

Exercice 7

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $E - \mathbb{R}$ e.v. de dimension finie, et si $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on définit l'endomorphisme $P(u)$ par $P(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ où $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$ et $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

On suppose que $P(u) = 0$. Montrer que, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $P(\lambda) = 0$.

Exercice 8

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont ses valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (A - \lambda_k I_n) = 0$.

$\sim\blacktriangleleft$ Indications pour les exercices du TD n° 9 $\blacktriangleright\sim$

Ex. 1 : écrire la relation de récurrence sous forme matricielle puis calculer les puissances de la matrice.
Ex. 2 : 1. ok ; 2. écrire la relation de récurrence sous forme matricielle puis utiliser 1.
Ex. 3 : 1. utiliser l'égalité $A(A-I_n)^2 = 0$ pour montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0,1\}$, puis raisonner par l'absurde pour obtenir l'égalité ; 2. par l'absurde montrer que si A est diagonalisable, $A^2 = A$; 3. calculer A^3, A^4 puis conjecturer le résultat.
Ex. 4 : a) faire le calcul et utiliser la relation pour montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}$; b) regarder les v.p. possibles puis utiliser l'égalité du a).
Ex. 5 : a) calculer aussi M^4 et trouver une relation simple entre les puissances paires (resp. impaires) de M ; b) utiliser la relation entre M^3 et M pour trouver les v.p. possibles puis chercher les s.e.p. et conclure.
Ex. 6 : 1. montrer que $u \circ u = \mathrm{Id}$; 2. montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$, puis vérifier que $\mathrm{Sp}(u) = \{-1,1\}$ en déterminant les s.e.p.
Ex. 7 : considérer un vecteur propre associé à λ et calculer $P(u)(x)$ après avoir montré par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k x$.
Ex. 8 : diagonaliser $P(A)$ en utilisant la matrice de passage qui diagonalise A.

$\sim\blacktriangleleft$ Indications pour les exercices du TD n° 9 $\blacktriangleright\sim$

Ex. 1 : écrire la relation de récurrence sous forme matricielle puis calculer les puissances de la matrice.
Ex. 2 : 1. ok ; 2. écrire la relation de récurrence sous forme matricielle puis utiliser 1.
Ex. 3 : 1. utiliser l'égalité $A(A-I_n)^2 = 0$ pour montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0,1\}$, puis raisonner par l'absurde pour obtenir l'égalité ; 2. par l'absurde montrer que si A est diagonalisable, $A^2 = A$; 3. calculer A^3, A^4 puis conjecturer le résultat.
Ex. 4 : a) faire le calcul et utiliser la relation pour montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}$; b) regarder les v.p. possibles puis utiliser l'égalité du a).
Ex. 5 : a) calculer aussi M^4 et trouver une relation simple entre les puissances paires (resp. impaires) de M ; b) utiliser la relation entre M^3 et M pour trouver les v.p. possibles puis chercher les s.e.p. et conclure.
Ex. 6 : 1. montrer que $u \circ u = \mathrm{Id}$; 2. montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$, puis vérifier que $\mathrm{Sp}(u) = \{-1,1\}$ en déterminant les s.e.p.
Ex. 7 : considérer un vecteur propre associé à λ et calculer $P(u)(x)$ après avoir montré par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k x$.
Ex. 8 : diagonaliser $P(A)$ en utilisant la matrice de passage qui diagonalise A.