TD n° 9 : Réduction des endomorphismes (3)

Exercice 1

a) Calculer les puissances $n^{\text{ièmes}}$ $(n \in \mathbb{N})$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \\ u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = -2. \end{cases}$

Exercice 2

On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ -u_n + w_n \\ -u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, A et n.
3. Montrer que A est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.
4. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à f.

a) Calculer $(A - I_3)^2$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
b) Déterminer les sous-espaces propres de f et en déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On considère l'application Γ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ par : $\Gamma(X) = -X + \mathrm{Tr}(X) I_n$.

a) Montrer que $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\Gamma^2 + a\Gamma + b\,\mathrm{Id} = 0$.
b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Γ. Γ est-il diagonalisable ?

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, tel que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$ et $f^3 + f = 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de f.
2. On suppose $f \neq 0$. Montrer que tout vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$ est un vecteur propre de f. Conclure.

∼◀ Indications pour les exercices du TD n° 9 ▶∼

Ex. 1 : a) diagonaliser A ; b) écrire la relation de récurrence en utilisant A.
Ex. 2 : 1) ok ; 2) récurrence ; 3) ok ; 4) calculer A^n et utiliser 2).
Ex. 3 : a) montrer que 1 est la seule v. p. de A ; b) déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et la compléter pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de f dans cette base ; c) écrire $A = I + N$ où N est nilpotente et utiliser la formule du binôme.
Ex. 4 : a) calculer $\Gamma(\Gamma(X))$ en utilisant la linéarité de la trace ; b) utiliser la relation du a) pour trouver une relation vérifiée par les valeurs propres puis déterminer les sous-espaces propres et leurs dimensions.
Ex. 5 : 1. montrer que les v.p. vérifient $\lambda^3 + \lambda = 0$ et utiliser $\dim \mathrm{Ker}(f)$; 2. utiliser une base de $\mathrm{Im}(f)$, en déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ puis $f^2 = 0$ et enfin $f = 0$ pour aboutir à une contradiction.