TD n° 8 : Réduction des endomorphismes (2)

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et M la matrice telle que $M = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que -1 est valeur propre de M.

2. Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle le sous-espace propre associé à -1 est de dimension 2. Dans ce cas, M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

b) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $g^3 + 2g = f$. Démontrer que $g \circ f = f \circ g$. En déduire que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

c) Trouver tous les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que : $g^3 + 2g = f$.

Exercice 3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si A^2 a une valeur propre réelle strictement négative, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Construire une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, non diagonalisable, telle que A^2 soit diagonalisable.

Exercice 4 (*Ensae 2023*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$ et dont la première colonne, notée C, est non nulle.

1. Montrer qu'il existe $L = (1 \ \ell_2 \ \cdots \ \ell_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = CL$.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(M) = LC$. En déduire que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.
3. Montrer que les valeurs propres de M sont des racines de $P : x \longmapsto x^2 - \mathrm{Tr}(M)x$.
4. Montrer que $\mathrm{Tr}(M)$ est valeur propre de M.

En déduire l'équivalence : $\mathrm{Tr}(M) \neq 0 \Longleftrightarrow M$ est diagonalisable.

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et α, β deux réels distincts. On considère l'application u de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = (x-\alpha)(x-\beta)P'(x) - [nx - n(\alpha+\beta)]P(x)$.

a) Démontrer que u est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Soient P un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ et a une racine d'ordre k ($k \geqslant 1$) de P. On pose $P(x) = (x-a)^k Q(x)$ où $Q(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q_1 tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = (x-a)^{k-1}Q_1(x)$ et $Q_1(a) \neq 0$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-\alpha)(x-\beta)Q_1(x) = [nx - (\alpha+\beta)n + \lambda](x-a)Q(x)$ et en déduire que $a = \alpha$ ou $a = \beta$.
3. Montrer que P est de la forme $P(x) = K(x-\alpha)^i(x-\beta)^j$ où $K \in \mathbb{R}^*$ et $i + j \leqslant n$.
4. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 6

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre. Montrer que u est une homothétie vectorielle i.e. qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \ddots & \\ & \bigcirc & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si le polynôme $P : x \longmapsto x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ admet n racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (*Ensae*)

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soit $u : P \in E \longmapsto Q$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres de u. u est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que $\left(x \longmapsto (x-1)^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de E. Donner les sous-espaces propres de u.

~◀ INDICATIONS POUR LES EXERCICES DU TD N° 8 ▶~

Ex. 1 : 1. $M+I_3$ n'est pas inversible ; 2. calculer $\dim \mathrm{Ker}(M+I_3)$ grâce à $\mathrm{rg}(M+I_3)$ selon a ; chercher une autre valeur propre possible avec la trace et vérifier.
Ex. 2 : a) ok ; b) remplacer f par g^3+2g puis, en utilisant $g \circ f = f \circ g$ montrer que si $x \in E_\lambda(f)$ alors $f(g(x)) = \lambda g(x)$; c) montrer que si g est solution, g est diagonalisable puis travailler avec les matrices.
Ex. 3 : a) raisonner par l'absurde ; b) chercher une matrice ayant beaucoup de coefficients nuls dont le carré est une matrice diagonale qui possède une valeur propre strictement négative.
Ex. 4 : 1. les colonnes sont colinéaires ; 2. déterminer les coefficients diagonaux de M ; 3. partir de $MX = \lambda X$ et utiliser 2. ; 4. calculer MC grâce à 1., puis raisonner sur la dimension des s.e.p. possibles obtenues grâce à 3.
Ex. 5 : a) vérifier la linéarité ; b) 1. a est racine d'ordre $k-1$ de P' ; b) 2. dans $u(P) = \lambda P$ remplacer $P(x)$ par $(x-a)^k Q(x)$, idem avec P' ; b) 3. P n'admet que deux racines donc... ; b) 4. chercher des vecteurs propres parmi les P trouvés en 3. et en déduire les valeurs propres de u puis conclure.
Ex. 6 : montrer que chaque vecteur de la base canonique vérifie $u(e_i) = \lambda_i e_i$ puis utiliser $e_1 + \cdots + e_n$ pour conclure.
Ex. 7 : on résout $AX = \lambda X$ et on vérifie que les v.p. de A sont les racines de P puis on conclut.
Ex. 8 : 1) il y a deux conditions à vérifier ; 2) écrire la matrice de u dans la base canonique ; 3) calculer le rang de la famille, puis l'image de chaque vecteur par u.