TD n° 7 : Réduction des endomorphismes (1)

Exercice 1

Soient trois $\mathbb{R}$-e.v. E, F, G de dimension finie et deux applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E,F),\ g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que :
1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f)$ est une somme directe.
2. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et deux endomorphismes $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ qui commutent i.e. tels que $u \circ v = v \circ u$.
1. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
2. On suppose ici que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 3

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par : $V = \{(a,a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$
1. Soient $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\}$ et $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y + z\}$. Montrer que W_1 et W_2 sont deux supplémentaires de V dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le projecteur p de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(p) = W_1$ et $\mathrm{Im}(p) = V$, puis la symétrie s par rapport à V de direction W_1.

Exercice 4

Soient p et q deux projecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$.
1. Montrer que $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}(p)$.
2. Montrer que r est un projecteur.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que si x est un vecteur propre de f et de g, alors x est un vecteur propre de $f+g$ et de $f \circ g$.
b) Montrer que, si $f \circ g = g \circ f$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, le sous-espace propre de f associé à λ est stable par g.
c) Montrer que si f est nilpotent, alors 0 est la seule valeur propre de f.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E.
Montrer que les seules valeurs propres possibles pour p sont 0 et 1. À quelle condition le sont-elles effectivement ?

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ avec $s \neq \mathrm{Id}_E$ et $s \neq -\mathrm{Id}_E$.
a) Montrer que les seules valeurs propres possibles de s sont 1 et -1.
b) Calculer $(s - \mathrm{Id}_E) \circ (s + \mathrm{Id}_E)$ et montrer que 1 et -1 sont bien valeurs propres de s.
c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. En déduire que s est diagonalisable et donner la matrice de s dans une base formée de vecteurs propres de s.

Exercice 8

Déterminer les coefficients de $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sachant qu'elle admet pour vecteurs propres $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.
a) Calculer les valeurs propres de f.
b) Déterminer les sous-espaces propres de f et leurs dimensions.
c) f est-il diagonalisable ?

Exercice 10

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.
b) Montrer que u est diagonalisable.
c) Déterminer $u \circ u$. Conclusion ?

Exercice 11

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que :

$$u^3 - 3u^2 + 2u = 0.$$

a) Montrer que les seules valeurs propres possibles de u sont 0,1 et 2.
b) Montrer que u est diagonalisable.

∼◀ Indications pour les exercices du TD n° 7 ▶∼

Ex. 1 : 1. ($\Longrightarrow$) : montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$; ($\Longleftarrow$) : montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$; 2. ($\Longrightarrow$) : utiliser $g(y) = g(f(x))$ pour décomposer y ; ($\Longleftarrow$) : montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$.
Ex. 2 : 1. vérifier que : $\forall x \in \mathrm{Im}(u)$ (resp. $\mathrm{Ker}(u)$), $v(x) \in \mathrm{Im}(u)$ (resp. $\mathrm{Ker}(u)$) ; 2. décomposer $y = u(x)$ en décomposant x grâce à la somme directe et utiliser 1. pour $\mathrm{Ker}\, v$.
Ex. 3 : 1. chercher d'abord des bases de W_1 et W_2 ; 2. décomposer un vecteur (x, y, z) comme somme d'un vecteur de W_1 et d'un vecteur de V.
Ex. 4 : 1. ok ; 2. calculer $r \circ r$; 3. raisonner par double inclusion en utilisant les hypothèses sur p et q, et vérifier que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$.
Ex. 5 : a) b) appliquer les définitions ; c) montrer que si $f(x) = \lambda x$ et $f^n = 0$ alors $\lambda^n = 0$; puis montrer que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$.
Ex. 6 : utiliser $p \circ p = p$ puis $E_0 = \mathrm{Ker}(p),\ E_1 = \mathrm{Im}(p)$.
Ex. 7 : a) s'inspirer de l'ex. 2 ; b) $s + \mathrm{Id}_E$ et $s - \mathrm{Id}_E$ ne peuvent pas être bijectifs ; c) s est une symétrie, en déduire une base de E formée de vecteurs propres.
Ex. 8 : écrire $AV_i = \lambda_i V_i$ puis résoudre.
Ex. 9 : a) chercher une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$; b) utiliser la réduite de Gauss obtenue en a) ; c) utiliser les dimensions des sous-espaces propres.
Ex. 10 : a) b) idem ex. 3 ; c) utiliser la matrice diagonale semblable à A.
Ex. 11 : a) montrer que les valeurs propres λ vérifient $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$; b) montrer que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.