TD n° 7 : Réduction des endomorphismes (1)

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E.
On note $f \circ f = f^2$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
b) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$
c) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$

Exercice 2

Pour tout réel a, on note $E_a = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(a) = 0\}$.

1. Déterminer une base et la dimension de E_a.
2. Soient a et b deux réels distincts. Déterminer une base d'un s.e.v. F de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que F soit un supplémentaire commun à E_a et à E_b dans $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 3

Soient E et F les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ définis par : $E = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b = c+d = 0\}$ et $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d = 0\}$.

a) Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
b) Déterminer l'image du vecteur (x,y,z,t) par la projection p sur E parallèlement à F, et la symétrie s par rapport à F de direction E.

Exercice 4

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a) Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
b) Montrer qu'alors : $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 5

Soient $p, q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ deux projecteurs. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $p(x) = q(x)$.

1. Calculer $(\mathrm{Id} - p \circ q) \circ p(x)$.
2. Calculer $(p+q) \circ (\mathrm{Id} - p)(x)$.
3. On suppose que $p+q$ et $\mathrm{Id} - p \circ q$ sont inversibles. Montrer que $p-q$ est inversible.

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que si x est un vecteur propre de f et de g, alors x est un vecteur propre de $f+g$ et de $f \circ g$.
b) Montrer que, si $f \circ g = g \circ f$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, le sous-espace propre de f associé à λ est stable par g.
c) Montrer que si f est nilpotent, alors 0 est la seule valeur propre de f.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E.
Montrer que les seules valeurs propres possibles pour p sont 0 et 1.
À quelle(s) condition(s) le sont-elles effectivement ?

Exercice 8

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. u est-il diagonalisable ?
b) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u ait pour matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. Montrer que les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}\left((f - 3\,\mathrm{Id})^2\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres de A.

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est-il diagonalisable ?

Exercice 11

Soit $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. A_α est-elle diagonalisable ?

~◀ Indications pour les exercices du TD n° 7 ▶~

Ex. 1 : a)$\Longrightarrow$ b) : montrer que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ en utilisant $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$; b)$\Longrightarrow$ c) : montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$; c)$\Longrightarrow$ a) : montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ en partant de $f(x) = f^2(y)$.
Ex. 2 : 1. trouver une famille génératrice en utilisant la divisibilité par $x - a$ et vérifier la liberté ; 2. chercher $\dim F$ puis choisir une base adaptée.
Ex. 3 : a) chercher des bases de E et F ; b) décomposer tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F.
Ex. 4 : a) partir de $(p + q) \circ (p + q) = p + q$ puis composer par p à gauche ; b) montrer une double inclusion en utilisant $p \circ q = 0$; montrer que la somme des images est directe, puis montrer une double inclusion.
Ex. 5 : 1) et 2) développer et utiliser $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$; 3) montrer que $\mathrm{Ker}(p - q) = \{0\}$ en utilisant ce qui précède et conclure.
Ex. 6 : a) b) appliquer les définitions ; c) montrer que si $f(x) = \lambda x$ et $f^n = 0$ alors $\lambda^n = 0$; puis montrer que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$.
Ex. 7 : utiliser $p \circ p = p$ puis $E_0 = \mathrm{Ker}(p),\ E_1 = \mathrm{Im}(p)$.
Ex. 8 : a) trouver une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$ et conclure ; raisonner par l'absurde ; b) chercher des vecteurs vérifiant les conditions : $u(e_1) = e_1), u(e_2) = e_1 + e_2, u(e_3) = e_2 + e_3$.
Ex. 9 : 1. ok ; 2. déterminer $\mathrm{Ker}\left((f - 3\,\mathrm{Id})^2\right)$ et vérifier que l'intersection avec $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est réduite au vecteur nul, puis choisir une base convenable.
Ex. 10 : déterminer la dimension des sous-espaces propres.
Ex. 11 : chercher les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres.