P. Sup. B/L Octobre 2025

TD n°6: Fonctions polynômes

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression factorisée du polynôme $P: x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-x)^{3n-2k} x^k$.

Exercice 2

On cherche à déterminer les réels a,b et c vérifiant : (S) $\begin{cases} a < b < c \\ a+b+c=9 \\ abc=15 \\ ab+ac+bc=23 \end{cases}$

- 1. Déterminer un polynôme unitaire P dont a,b et c sont les racines et l'écrire sous forme développée.
- 2. En déduire toutes les solutions de (S).

Exercice 3

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$ divisibles par $x \longmapsto x-1$ et $x \longmapsto x+2$, et dont le reste de la division euclidienne par $x \longmapsto x^2-2$ est 3.

Exercice 4

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$ dont le reste de la division euclidienne par les polynômes $x \longmapsto x-1, x \longmapsto x+1$ et $x \longmapsto x-2$ est toujours égal à 3.

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de :

a)
$$A: x \longmapsto x^n$$
 par $B: x \longmapsto x^2 - 3x + 2$; b) $P: x \longmapsto x^{2n} + 2x^n + 1$ par $Q: x \longmapsto x^2 + 1$, puis par $S: x \longmapsto (x-1)^2$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$, sans utiliser la division euclidienne, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $Q: x \longmapsto (x-1)^2$ divise $P: x \longmapsto ax^{n+1} + bx^n + 1$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, n > 1; montrer qu'on peut mettre en facteur x - 1 dans le polynôme $P: x \longmapsto x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P?

Exercice 8

Pour quelles valeurs de a le polynôme $P: x \longmapsto (x+1)^7 - x^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 9

Déterminer les polynômes P de degré 5 tels que $x \mapsto (x-2)^3$ divise P+2 et $x \mapsto (x-1)^3$ divise P-1 en remarquant que P' doit avoir deux racines multiples.

Exercice 10

- 1. Sans développer, montrer que le polynôme $T:x\longmapsto (x-3)^2-2(x-2)^2+(x-1)^2-2$ est le polynôme nul.
- 2. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \ P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$. Montrer que : P = Q = 0.

Ex. 1 : mettre d'abord $(1-x)^n$ en facteur, puis utiliser la formule du binôme de Newton.

Ex. 2:1. trouver P sous forme factorisée, puis développer; 2. déterminer les coefficients de P à l'aide de (S) puis calculer ses racines.

Ex. 3 : utiliser P(1) = P(-2) = 0 pour trouver le quotient de P-3 par $x \longmapsto x^2-2$.

Ex. 4 : remarquer que 1, -1 et 2 sont racines de P-3.

Ex. 5 : a) le reste est de la forme ax+b; trouver a et b en remplaçant x par les racines de $x \longmapsto x^2-3x+2$; b) idem avec une racine complexe de Q, puis utiliser la racine double de S et dériver l'égalité.

Ex. 6: la condition est équivalente à : 1 est racine d'ordre au moins 2 de P.

Ex. 7 : calculer P(1), P'(1), etc.

Ex. 8 : résoudre P(x) = P'(x) = 0.

Ex. 9 : 2 est racine d'ordre au moins 3 de P+2 et 1 d'ordre au moins 3 de P-1 donc racines d'ordre au moins 2 de leurs dérivés et $\deg P'=4...$

Ex. 10 : 1. calculer T(1), T(2) et T(3); 2. utiliser les valeurs de x qui annulent le sinus, puis le cosinus.

\sim ■ Indications pour les exercices du TD n $^\circ$ 6 \blacktriangleright \sim

Ex. 1 : mettre d'abord $(1-x)^n$ en facteur, puis utiliser la formule du binôme de Newton.

Ex. 2:1. trouver P sous forme factorisée, puis développer; 2. déterminer les coefficients de P à l'aide de (S) puis calculer ses racines.

Ex. 3: utiliser P(1) = P(-2) = 0 pour trouver le quotient de P-3 par $x \longmapsto x^2-2$.

Ex. 4 : remarquer que 1, -1 et 2 sont racines de P-3.

Ex. 5 : a) le reste est de la forme ax + b; trouver a et b en remplaçant x par les racines de $x \mapsto x^2 - 3x + 2$; b) idem avec une racine complexe de Q, puis utiliser la racine double de S et dériver l'égalité.

Ex. 6: la condition est équivalente à : 1 est racine d'ordre au moins 2 de P.

Ex. 7 : calculer P(1), P'(1), etc.

Ex. 8 : résoudre P(x) = P'(x) = 0.

Ex. 9 : 2 est racine d'ordre au moins 3 de P+2 et 1 d'ordre au moins 3 de P-1 donc racines d'ordre au moins 2 de leurs dérivés et $\deg P'=4...$

Ex. 10:1. calculer T(1), T(2) et T(3); 2. utiliser les valeurs de x qui annulent le sinus, puis le cosinus.