TD n° 6 : Fonctions polynômes

Exercice 1

1. En développant de deux façons le polynôme $P : x \longmapsto (x+1)^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. En utilisant la dérivée du polynôme $P : x \longmapsto (x+1)^n$ (pour $n \geqslant 1$), calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$.
2. En déduire que P est constant.

Exercice 3

Trouver les réels a et b tels que $B : x \longmapsto x^2 - 4x + 5$ divise $A : x \longmapsto x^4 - 4x^3 + ax^2 - 4x + b$.

Exercice 4

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tels que $\begin{cases} \deg P = 3 \\ P(-1) = P(0) = P(1). \end{cases}$

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de :

a) $A : x \longmapsto x^n$ par $B : x \longmapsto x^2 - 1$, puis par $C : x \longmapsto x^2 - 2x + 1$.

b) $P : x \longmapsto x^{n+2} - 3x^n + 2x + 3$ par $Q : x \longmapsto x^2 - 3$.

Exercice 6

Sans utiliser la division euclidienne, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $P : x \longmapsto x^3 - ax + b$ soit divisible par $Q : x \longmapsto (x-1)^2$.

Exercice 7

On considère le polynôme P tel que $\forall \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+1)^{2n+1} - x^{2n+1} - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'on peut mettre $x^2 + x$ en facteur dans $P(x)$.
2. Est-ce que -1 est racine double de P ?

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$.
Montrer que P_n n'a pas de racine multiple.

Exercice 9

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré 4 tels que $P(0) = 0$ et P' admet 1 pour racine double et -1 pour racine simple.

Exercice 10

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x) = x^2$. Retrouver la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 11

1. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. En partant de l'égalité $x = x - a + a$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

b) Appliquer à $P : x \longmapsto x^3 + 5x^2 + 10x + 10$ et $a = -1$. Retrouver le résultat en faisant des divisions euclidiennes successives par $x + 1$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré n tel que : $P(1) > 0,\ P'(1) \geqslant 0,\ P''(1) \geqslant 0, \ldots, P^{(n)}(1) \geqslant 0$.
Montrer que P n'a pas de racine réelle dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

~◀ Indications pour les exercices du TD n° 6 ▶~

Ex. 1 : 1. a) appliquer le binôme de Newton et l'égalité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n \times (x+1)^n$; 2. utiliser le binôme et $P'(1)$.
Ex. 2 : 1) récurrence ; 2) utiliser la limite en $+\infty$ en raisonnant par l'absurde.
Ex. 3 : effectuer la division euclidienne et choisir a et b pour que le reste soit nul.
Ex. 4 : poser $a = P(0)$ et utiliser les racines de $Q = P - a$.
Ex. 5 : a) le reste est de la forme $aX + b$; trouver a et b en remplaçant x par une racine de $x \longmapsto x^2 - 1$, puis idem avec la racine double de $x \longmapsto x^2 - 2x + 1$ mais en dérivant aussi l'égalité ; b) factoriser $x^{n+2} - 3x^n$ et conclure.
Ex. 6 : la condition est équivalente à : 1 est racine d'ordre au moins 2 de P.
Ex. 7 : 1) $x \longmapsto x^2 + x$ a 2 racines évidentes qui sont racines de P donc... ; 2) calculer $P'(-1)$.
Ex. 8 : trouver une relation entre P_n et P'_n et montrer que la seule racine multiple possible est 0 ; conclure.
Ex. 9 : $\deg P' = 3$ donc on a sa factorisation, reste à prendre une primitive en tenant compte de $P(0) = 0$.
Ex. 10 : déterminer d'abord le degré de P en cherchant le terme dominant de $P(x+1) - P(x)$ puis trouver ses coefficients ; sommer en faisant $x = k$.
Ex. 11 : 1. a) développer $x^k = ([x-a] + a)^k$ avec la formule du binôme dans $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ puis inverser les sommations ; b) appliquer ! ; 2. utiliser 1. a) pour montrer que $P(x) > 0$ si $x \geqslant 1$.

~◀ Indications pour les exercices du TD n° 6 ▶~

Ex. 1 : 1. a) appliquer le binôme de Newton et l'égalité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n \times (x+1)^n$; 2. utiliser le binôme et $P'(1)$.
Ex. 2 : 1) récurrence ; 2) utiliser la limite en $+\infty$ en raisonnant par l'absurde.
Ex. 3 : effectuer la division euclidienne et choisir a et b pour que le reste soit nul.
Ex. 4 : poser $a = P(0)$ et utiliser les racines de $Q = P - a$.
Ex. 5 : a) le reste est de la forme $aX + b$; trouver a et b en remplaçant x par une racine de $x \longmapsto x^2 - 1$, puis idem avec la racine double de $x \longmapsto x^2 - 2x + 1$ mais en dérivant aussi l'égalité ; b) factoriser $x^{n+2} - 3x^n$ et conclure.
Ex. 6 : la condition est équivalente à : 1 est racine d'ordre au moins 2 de P.
Ex. 7 : 1) $x \longmapsto x^2 + x$ a 2 racines évidentes qui sont racines de P donc... ; 2) calculer $P'(-1)$.
Ex. 8 : trouver une relation entre P_n et P'_n et montrer que la seule racine multiple possible est 0 ; conclure.
Ex. 9 : $\deg P' = 3$ donc on a sa factorisation, reste à prendre une primitive en tenant compte de $P(0) = 0$.
Ex. 10 : déterminer d'abord le degré de P en cherchant le terme dominant de $P(x+1) - P(x)$ puis trouver ses coefficients ; sommer en faisant $x = k$.
Ex. 11 : 1. a) développer $x^k = ([x-a] + a)^k$ avec la formule du binôme dans $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ puis inverser les sommations ; b) appliquer ! ; 2. utiliser 1. a) pour montrer que $P(x) > 0$ si $x \geqslant 1$.