P. Sup. B/L Octobre 2025

TD n° 5: Variables aléatoires discrètes (3)

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et soit $\varepsilon > 0$.

Démontrer que :
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
.

2. Application : On lance un dé honnête. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

- 1. Soit $t \ge 0$ fixé. Montrer que, pour tout $u \ge 0$, $\mathbb{P}(X \ge t) \le e^{-ut}\mathbb{E}(e^{uX})$.
- 2. En déduire que, pour tout $t > \lambda$, $\mathbb{P}(X \ge t) \le e^{-t \ln(t) + t(\ln(\lambda) + 1) \lambda}$.

Exercice 3

On lance deux fois de suite un dé honnête. Soient X et Y respectivement le premier et le second numéro obtenus et soit $U = \min(X, Y)$.

- a) Donner la loi du couple (X,Y), la loi de X et la loi de Y. Les V.A.R. X et Y sont-elles indépendantes?
- b) Déterminer la loi du couple (X,U) et la loi de U. Les variables X et U sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée, les deux lancers successifs étant supposés indépendants. On désigne par X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de piles obtenues moins un (resp. la différence entre le nombre de piles au deuxième lancer et le nombre de piles au premier lancer).

- 1. Quelle est la loi conjointe du couple (X_1, X_2) ?
- 2. Calculer la covariance du couple (X_1, X_2) .
- 3. Les deux variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

Exercice 5

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de Bernoulli. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si cov(X,Y) = 0.

Exercice 6

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note Z la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la plus grande des valeurs de X et $Y:Z=\max(X,Y)$. Déterminer la loi de probabilité de Z.

Exercice 7 (Ensae-Saclay 2016)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout entier $n \ge 1$, on pose $S_n = X_n + S_{n-1}$, et on définit $S_0 = 0$.

- 1. Montrer que, pour tout $s \ge 2$, $\mathbb{P}(S_2 = s) = (s-1)p^2(1-p)^{s-2}$.
- 2. Donner la loi de S_n .
- 3. Soit $a \in \mathbb{N}$ et T_a le plus petit entier t tel que $S_t > a$.
- a) Donner les valeurs prises par T_a .
- b) Que vaut $\mathbb{P}(T_a > 1)$? $\mathbb{P}(T_a = a + 1)$?
- c) Donner la loi de T_a et reconnaître celle de $T_a 1$. En déduire $\mathbb{E}(T_a)$.

Exercice 8

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules successivement et sans remise. On note X_i la variable aléatoire égale au numéro porté par la i-ème boule tirée.

- a) Déterminer la loi de X_i .
- b) Si $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes?
- c) On pose $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
 - 1) Calculer $\mathbb{E}(X_i)$, puis $\mathbb{E}(S)$.
 - 2) Calculer $V(X_i)$, $cov(X_i, X_j)$, ρ_{X_i, X_j} puis V(S).

~◀ Indications pour les exercices du TD n°5 ▶~

Ex. 1:1. appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\frac{X}{n}$; 2. appliquer le 1. avec $p=\frac{1}{6}.$

Ex. 2 : 1. appliquer l'inégalité de Markov à e^{uX} si u>0; 2. déterminer le minimum de $u\longmapsto -ut+\lambda(e^u-1)$ sur \mathbb{R}^+ .

Ex. 3 : a) tous les résultats sont équiprobables ; X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$; b) dénombrer en tenant compte du fait que $X\geqslant U$ puis utiliser le tableau pour avoir la loi de U et voir s'il y a indépendance ou non.

Ex. 4 : 1) distinguer les 4 résultats PP, PF, FP, FF et résumer les résultats dans un tableau ; 2) calculer $\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$; 3) regarder le tableau.

Ex. 5 : calculer la covariance en fonction de $p = \mathbb{P}(X = 1)$ et $p' = \mathbb{P}(Y = 1)$.

Ex. 6 : calculer d'abord $\mathbb{P}(Z\leqslant k)$ puis en déduire $\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(Z\leqslant k)-\mathbb{P}(Z\leqslant k-1)$.

Ex. 7 : 1. décomposer $(X_1 + X_2 = s)$ en une réunion disjointe selon les valeurs prises par X_1 ; 2. regarder S_n comme le temps d'attente du n-ième succès ; 3. a) ne pas oublier que $S_t \geqslant t...$; b) utiliser les variables S_i ; c) idem

Ex. 8 : a) dénombrer avec des arrangements; b) calculer $\mathbb{P}((X_i=1)\cap(X_j=1))$ et conclure; c) 1) linéarité de l'espérance; c) 2) calculer $\mathbb{E}(X_iX_j)$ et en déduire $\mathrm{cov}(X_i,X_j)$ puis V(S)=

$$\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(X_i, X_j).$$