TD n° 5 : Variables aléatoires discrètes (3)

Exercice 1

Trois khâgneux vont au cinéma. Peu emballés par la programmation, ils choisissent au hasard et indépendamment les uns des autres l'un des trois films en séance.

1. Soit X le nombre aléatoire de khâgneux choisissant le premier film et Y le nombre de films choisis par au moins un khâgneux. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Quelle est la covariance du couple (X, Y) ? X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de Bernoulli. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 3

Soient X et Y deux V.A.R. indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. $(X = Y)$; 2. $(X \geqslant kY)$ où k est un entier naturel non nul fixé.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{1}{n}\big)$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant n^2) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}\big(|X - n| \geqslant n\big) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$. En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 5

Soit n un entier naturel strictement positif, soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ et soit $F = \dfrac{X}{n}$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de F.
2. Déterminer n tel que $\mathbb{P}\big(|F - \mathbb{E}(F)| < 10^{-2}\big) \geqslant 0,98$.

Exercice 6

Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On tire au hasard un jeton, que l'on remet dans l'urne. Soit Z son numéro. Si ce numéro est n, alors on tire sans remise n jetons de l'urne et on les distribue au hasard dans trois boîtes B_1, B_2, B_3.

Soit X_i la variable aléatoire égale au nombre de jetons reçus par la boîte B_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

1. Déterminer la loi du couple (Z, X_i).
2. En déduire la loi et l'espérance de X_i, puis calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{X_i}{Z}\right)$.

Exercice 7

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et soit $Z = X+Y$. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $(Z = n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$?

Exercice 8

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$ et Y suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{3}{4}$.

Calculer l'espérance de $Z = X^Y$.

Exercice 9

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de (Y_n, Y_{n+1}) et $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+1})$.

∼◀ Indications pour les exercices du TD n° 5 ▶∼

Ex. 1 : 1. il y a 27 répartitions possibles des 3 khâgneux ; 2. calculer $\mathbb{E}(XY), \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$, et pour l'indépendance regarder le tableau.
Ex. 2 : $\Longrightarrow$: ok ; $\Longleftarrow$: exprimer la covariance en fonction de $p = \mathbb{P}(X = 1)$ et $p' = \mathbb{P}(Y = 1)$.
Ex. 3 : 1. écrire $(X = Y)$ comme une réunion disjointe puis sommer les probabilités en utilisant l'indépendance ; 2. utiliser le système complet d'événements $(Y = j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ et ne pas oublier que $\mathbb{P}(X > n) = q^n$ pour une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.
Ex. 4 : 1. inégalité de Markov ; 2. inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis se souvenir que $X \geqslant 1$.
Ex. 5 : 1. ok ; 2. utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Ex. 6 : 1. $Z \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,N]\!]}$ et calculer $\mathbb{P}(X_i = k \mid Z = n)$ en reconnaissant une loi usuelle pour la loi conditionnelle de X_i sachant $(Z = n)$; 2. probabilités totales, pour $E(X_i)$ faire une inversion dans l'ordre des sommations ou utiliser la somme $X_1 + X_2 + X_3$ et pour $\mathbb{E}(X_i/Z)$ utiliser la loi de (Z, X_i).
Ex. 7 : utiliser $(X = k) \cap (Z = n) = (X = k) \cap (Y = n - k)$ avec l'indépendance.
Ex. 8 : utiliser la loi du couple (X, Y) puis l'indépendance.
Ex. 9 : 1. loi de Bernoulli ; 2. remplir les cases du tableau.

∼◀ Indications pour les exercices du TD n° 5 ▶∼

Ex. 1 : 1. il y a 27 répartitions possibles des 3 khâgneux ; 2. calculer $\mathbb{E}(XY), \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$, et pour l'indépendance regarder le tableau.
Ex. 2 : $\Longrightarrow$: ok ; $\Longleftarrow$: exprimer la covariance en fonction de $p = \mathbb{P}(X = 1)$ et $p' = \mathbb{P}(Y = 1)$.
Ex. 3 : 1. écrire $(X = Y)$ comme une réunion disjointe puis sommer les probabilités en utilisant l'indépendance ; 2. utiliser le système complet d'événements $(Y = j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ et ne pas oublier que $\mathbb{P}(X > n) = q^n$ pour une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.
Ex. 4 : 1. inégalité de Markov ; 2. inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis se souvenir que $X \geqslant 1$.
Ex. 5 : 1. ok ; 2. utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Ex. 6 : 1. $Z \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,N]\!]}$ et calculer $\mathbb{P}(X_i = k \mid Z = n)$ en reconnaissant une loi usuelle pour la loi conditionnelle de X_i sachant $(Z = n)$; 2. probabilités totales, pour $E(X_i)$ faire une inversion dans l'ordre des sommations ou utiliser la somme $X_1 + X_2 + X_3$ et pour $\mathbb{E}(X_i/Z)$ utiliser la loi de (Z, X_i).
Ex. 7 : utiliser $(X = k) \cap (Z = n) = (X = k) \cap (Y = n - k)$ avec l'indépendance.
Ex. 8 : utiliser la loi du couple (X, Y) puis l'indépendance.
Ex. 9 : 1. loi de Bernoulli ; 2. remplir les cases du tableau.