

TD n° 4 : Variables aléatoires discrètes (2)**Exercice 1**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi et l'espérance de la variable $Y = \frac{1}{X+1}$.

Exercice 2

On lance un dé honnête et on s'arrête dès qu'on a obtenu un as pour la seconde fois. Soit X le numéro du lancer où on obtient le premier as et Y le nombre total de lancers. Déterminer la loi et l'espérance des variables X et Y .

Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire et on procède à l'expérience suivante : on effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et à chaque pas du tirage on replace dans l'urne la boule obtenue en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur.

On note X_n le nombre aléatoire de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages. Quelle est la loi de X_n ? (on commencera par les cas $n = 1$ et $n = 2$)

Exercice 4 (*Ensae-Saclay 2021*)

On lance une pièce équilibrée. Le jeu s'arrête dès lors qu'on a deux Piles successifs. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers jusqu'à ce que le jeu s'arrête.

1. Donner $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. Montrer que pour $k \geq 3$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = k - 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X = k - 2)$.
3. En déduire la loi et l'espérance de X .

Exercice 5

Une pièce pipée donne pile avec une probabilité $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Deux personnes A et B jouent avec cette pièce, elle est lancée 2 fois.

Si on obtient pile puis face, A a gagné, si on obtient face puis pile, B a gagné, sinon on relance la pièce 2 fois, etc.

1. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
2. Soit T le nombre de lancers de la pièce jusqu'à l'obtention d'un gagnant. Donner la loi de T et son espérance.

Exercice 6

a) On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées. On lui attribue 1 point par bonne réponse. Soit X_1 le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de X_1 ?

b) Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, il peut choisir à nouveau une des autres réponses proposées. On lui attribue alors $\frac{1}{2}$ point par bonne réponse. Soit X_2 le nombre de points obtenus lors de ces seconds choix. Quelle est la loi de X_2 ?

c) Soit X le total des points obtenus. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

d) Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

Exercice 7

Soit $q \in]0, 1[$ et soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = q\mathbb{P}(X \geq k).$$

Déterminer la loi de X puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8

On suppose que dans la mémoire d'un smartphone, le nombre de faux 0 (i.e. de bits qui devraient être égaux à 1) suit une loi de Poisson de paramètre λ_1 , et que le nombre de faux 1 (qui devraient être des 0) suit une loi de Poisson de paramètre λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2$. On suppose aussi que ces deux phénomènes sont indépendants.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire égale au nombre total d'erreurs de bits ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que n erreurs ont été commises, combien y a-t-il de faux 0 ?

Ex. 1 : ok en utilisant $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$.

Ex. 2 : ok pour X , pour Y utiliser le système complet $(X = k)_{k \geq 1}$; pour $\mathbb{E}(Y)$, écrire $Y = X + Z$ en précisant la loi de Z .

Ex. 3 : montrer par récurrence que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,n]}$ en utilisant le lien entre X_n et X_{n-1} et les événements "on tire une boule blanche au n -ième tirage" et son contraire.

Ex. 4 : 1. ok ; 2. distinguer 2 cas selon que l'on obtient Pile ou Face au 1er lancer ; 3. récurrence linéaire d'ordre 2...

Ex. 5 : 1) calculer d'abord la probabilité que A gagne au k -ième essai puis utiliser une réunion, idem pour B ; 2) temps d'attente...

Ex. 6 : a) X_1 suit une loi binomiale ; b) utiliser $Y_2 = 2X_2$ et le système complet $(X_1 = i)_{i \in [0,20]}$; c) $X = X_1 + X_2$ d'où... ; d) on veut $\mathbb{E}(X) = 5$.

Ex. 7 : a) utiliser $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$, en déduire que $(\mathbb{P}(X \geq k))_k$ est une suite géométrique, puis la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$; conclure.

Ex. 8 : 1. utiliser l'indépendance des variables associées aux faux 0 et aux faux 1, ainsi que le binôme de Newton ; 2. exprimer la probabilité d'avoir k faux 0 à l'aide des deux variables introduites en 1. et de la variable associée au nombre total d'erreurs.

Ex. 1 : ok en utilisant $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$.

Ex. 2 : ok pour X , pour Y utiliser le système complet $(X = k)_{k \geq 1}$; pour $\mathbb{E}(Y)$, écrire $Y = X + Z$ en précisant la loi de Z .

Ex. 3 : montrer par récurrence que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,n]}$ en utilisant le lien entre X_n et X_{n-1} et les événements "on tire une boule blanche au n -ième tirage" et son contraire.

Ex. 4 : 1. ok ; 2. distinguer 2 cas selon que l'on obtient Pile ou Face au 1er lancer ; 3. récurrence linéaire d'ordre 2...

Ex. 5 : 1) calculer d'abord la probabilité que A gagne au k -ième essai puis utiliser une réunion, idem pour B ; 2) temps d'attente...

Ex. 6 : a) X_1 suit une loi binomiale ; b) utiliser $Y_2 = 2X_2$ et le système complet $(X_1 = i)_{i \in [0,20]}$; c) $X = X_1 + X_2$ d'où... ; d) on veut $\mathbb{E}(X) = 5$.

Ex. 7 : a) utiliser $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$, en déduire que $(\mathbb{P}(X \geq k))_k$ est une suite géométrique, puis la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$; conclure.

Ex. 8 : 1. utiliser l'indépendance des variables associées aux faux 0 et aux faux 1, ainsi que le binôme de Newton ; 2. exprimer la probabilité d'avoir k faux 0 à l'aide des deux variables introduites en 1. et de la variable associée au nombre total d'erreurs.