TD n° 3 : Variables aléatoires discrètes (1)

Exercice 1

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages dans les conditions suivantes : si on tire une boule noire on arrête et si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire.
Déterminer la loi de X. X admet-elle une espérance ?

Exercice 2

Existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ tel que l'on puisse définir une V.A.R. X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = (ak+1)e^{-k}\ ?$$

Exercice 3

Soit X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $\mathbb{P}(X > k+1) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.
On prélève simultanément et au hasard n jetons dans U_1, puis n jetons dans U_2. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de numéros communs aux deux prélèvements et Y la variable aléatoire égale à la somme des numéros communs aux deux prélèvements.

1. Déterminer la loi de X.
2. Soit $X_i, 1 \leqslant i \leqslant 2n$, la variable égale à 1 si le jeton n° i est dans les deux prélèvements et 0 sinon.

Déterminer l'espérance de X_i, puis celles de X et Y après avoir exprimé ces variables à l'aide des X_i.

Exercice 5

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité et X une V.A. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.
2. On suppose que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$ et que la série de terme général $u_k = \mathbb{P}(X > k)$ converge.

Montrer que X admet une espérance et que : $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

3. Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$ et en déduire : $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 6

Un urne contient des boules de deux couleurs : n blanches et n noires. On effectue des tirages sans remise. On appelle T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a tiré une couleur différente des précédentes.

1. a) Déterminer $T(\Omega)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(T > k)$.
   b) Calculer $\mathbb{E}(T)$ à l'aide des termes $\mathbb{P}(T > k),\ k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que : $0 \leqslant \dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$. En déduire une majoration de $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 7

1. Démontrer par récurrence ou à l'aide d'une somme télescopique que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geqslant n,\ \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}.$$

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement une à une, sans remise, les boules de cette urne. Soit X le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir toutes les boules blanches. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance, puis un équivalent de ces quantités lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 8

On tire avec remise 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit X le nombre de reines obtenues. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

Exercice 9

Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante : il est enfermé dans une cage comportant 4 portes derrière lesquelles se trouve un morceau de gruyère. Trois des 4 portes sont munies d'un dispositif envoyant une décharge électrique à l'animal s'il essaie de les franchir. La quatrième laisse le passage libre.

Soit X la V.A.R. égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte. Déterminer la loi de X et son espérance dans chacun des cas suivants :

1. Le rat n'a aucune mémoire : il recommence ses tentatives sans tenir compte des échecs passés.
2. Le rat a une mémoire immédiate : il ne tient compte que de l'échec qui précède immédiatement sa nouvelle tentative.
3. Le rat a une bonne mémoire : il élimine les portes où il a échoué.

Exercice 10

On lance un dé honnête et on s'arrête dès qu'on a obtenu un as pour la seconde fois. Soit X le numéro du lancer où on obtient le premier as et Y le nombre total de lancers. Déterminer la loi et l'espérance des variables X et Y.

Exercice 11

Déterminer la loi et l'espérance de la variable $Y = (-1)^X$ lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 12

On lance ensemble 5 dés honnêtes. On met de côté ceux qui ont donné l'as, puis on relance les autres et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les dés aient amené l'as. Le jeu s'arrête au bout de X lancers. En supposant que les dés sont numérotés, on note X_i le nombre de fois où le dé i a été lancé. Quelle est la loi des X_i ? Exprimer X en fonction des X_i et en déduire la loi de X.

~◀ Indications pour les exercices du TD n° 3 ▶~

Ex. 1 : utiliser la formule des probabilités composées pour calculer $\mathbb{P}(X = k)$.
Ex. 2 : calculer $\mathbb{P}(X = 0), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X = 2)$.
Ex. 3 : remarquer que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k + 1)$ et en déduire une relation de récurrence pour la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k\in\mathbb{N}^*}$.
Ex. 4 : 1. utiliser des combinaisons ; 2. idem pour X_i puis justifier que $Y = \sum_{i=1}^{2n} iX_i$.
Ex. 5 : 1. voir ex. 3 ; 2. faire tendre n vers l'infini ; 3. majorer $n\mathbb{P}(X > n)$ par $\mathbb{E}(X) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$.
Ex. 6 : 1) a) utiliser les probabilités composées ; b) voir l'indication de l'ex. 3 ; 2) majorer chaque terme du produit par 1/2.
Ex. 7 : 1. récurrence sur m pour n fixé ou $\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$; 2. pour la loi dénombrement avec permutations et combinaisons, puis utiliser 1.
Ex. 8 : succession d'épreuves de Bernoulli.
Ex. 9 : 1. temps d'attente... ; 2. à partir du 2 ème essai la probabilité d'échec est $\frac{2}{3}$; 3. probabilités composées.
Ex. 10 : X suit une loi géométrique ; pour calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ tenir compte du rang d'apparition du 1 er as.
Ex. 11 : utiliser le résultat sur la somme de la série exponentielle et remarquer que la somme des termes d'indices pairs est une fonction paire de la variable et celle des termes d'indices impairs est une fonction impaire.
Ex. 12 : les X_i suivent des lois géométriques ; utiliser $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1)$ après avoir remarqué que $(X \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{5} (X_i \leqslant k)$.