## TD n° 3: Variables aléatoires discrètes (1)

# Exercice 1

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de 2 couleurs différentes. On note X la V.A.R. égale au nombre de tirages effectués. Déterminer la loi et l'espérance de X.

#### Exercice 2

Une urne contient 2 boules blanches et n-2 boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche. Déterminer la loi et l'espérance de X.

# Exercice 3

- a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et X une V.A.R. à valeurs dans [0, n]. Montrer que :  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$ .
- b) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue N tirages successifs avec remise et on appelle X la V.A.R. égale au plus grand numéro amené. Calculer la loi puis l'espérance de X et donner un équivalent de  $\mathbb{E}(X)$  lorsque N tend vers l'infini.

#### Exercice 4

Soit X une V.A.R. telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n - 1)$ . Quelle est la loi de X?

#### Exercice 5

Dans tout l'exercice n est un entier vérifiant  $n \ge 1$  et  $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ ,  $(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ ,  $(c_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$  trois suites de nombres réels positifs.

1. En utilisant le fait que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^{n} (a_k + xb_k)^2 c_k \geqslant 0$ , justifier l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 c_k\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 c_k\right).$$

2. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans [1, n]. Montrer que :  $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(1/X) \ge 1$ .

### Exercice 6

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On y effectue une série de tirages selon le protocole suivant : chaque fois que l'on obtient la boule blanche, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule noire. On arrête les tirages dès que l'on obtient une boule noire. Soit X le nombre de tirages effectués.

- a) Déterminer la loi de X. Calculer son espérance, son moment d'ordre 2 et sa variance.
- b) Déterminer l'espérance de la variable  $\frac{1}{X}$ .

#### Exercice 7 (ENS Lyon 2021)

- 1) Trois boules discernables sont placées successivement et de manière indépendante dans trois cases pouvant contenir chacune de 1 à 3 boules. On appelle X la V.A.R. égale au nombre de cases occupées. Déterminer la loi et l'espérance de X.
- 2) On considère maintenant un nombre illimité de boules discernables qui sont toujours placées successivement et de manière indépendante dans trois cases de capacité illimitée. On suppose que ces cases sont vides au départ et que chaque boule est placée au hasard dans l'une des trois cases. Soit Y la V.A.R. égale au nombre de boules placées lorsque, pour la 1 ère fois, deux cases exactement sont occupées par au moins une boule et soit Z le nombre de boules placées lorsque, pour la première fois, trois cases contiennent chacune au moins une boule.
- a) Calculer, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(Y = k)$  et vérifier que :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$ , puis calculer l'espérance de Y.
- b) Soit  $(i, k) \in \mathbb{N}^2$ , calculer  $\mathbb{P}(Z = i | Y = k)$ .
- c) En déduire, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(Z = i)$  puis l'espérance de Z.
- d) Calculer  $\mathbb{P}(Z Y > Y)$ .

### Exercice 8 Le jeu de l'anormal

n individus (n > 2) jettent chacun une pièce honnête. Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres.

- a) Quelle est la probabilité qu'une partie comporte un gagnant ?
- b) On note X la V.A.R. égale au nombre de parties nécessaires à l'obtention d'un gagnant. Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.

# Exercice 9

Le nombre de clients d'un grand magasin dans une journée suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Pour payer ses achats, chaque client utilise l'une des n caisses mises à sa disposition. Toutes les caisses sont identiques et ont autant de chances d'être utilisées les unes que les autres. On suppose que tous les clients font des achats et on appelle X le nombre d'utilisateurs, par jour, de la caisse n° 1.

- a) Déterminer la loi de X en supposant que tous les clients payent leurs achats.
- b) Déterminer la loi de X en supposant qu'en moyenne, 1 client sur 10 sort du magasin sans payer ses achats.

## ~◀ INDICATIONS POUR LES EXERCICES DU TD N° 3 ▶~

- Ex. 1 : utiliser les probabilités composées pour trouver la loi.
- Ex. 2 : utiliser la formule des probabilités composées pour calculer  $\mathbb{P}(X=k)$ .
- Ex. 3 : a) décomposer (X=k) à l'aide de  $(X\geqslant k)$  et  $(X\geqslant k+1)$  ; b) calculer d'abord  $\mathbb{P}(X\leqslant k)$ , en déduire  $\mathbb{P}(X=k)$  et  $\mathbb{P}(X\geqslant k)$  puis utiliser a). Calculer  $\lim_{N\to +\infty}\mathbb{E}(X)$ .
- Ex. 4 : exprimer  $\mathbb{P}(X=n)$  en fonction de n et  $\mathbb{P}(X=0)$  puis déterminer  $\mathbb{P}(X=0)$
- Ex. 5 : 1. l'expression est un polynôme du second degré en x toujours positif donc...; 2. appliquer 1. avec  $c_k = \mathbb{P}(X = k)$
- Ex. 6 : a) probabilités composées et somme de la série exponentielle ; b) ok.
- Ex. 7 : 1) ok ; 2) a) choisir la case contenant les k-1 premières boules puis placer la k-ème ; b) même chose pour i-k boules ; c) utiliser le système complet d'événements  $(Y=k)_{k\geqslant 2}$  puis les sommes des séries de référence ; d) utiliser le système complet d'événements  $(Y=k)_{k\geqslant 2}$ .
- Ex. 8 : a) choisir un gagnant parmi n et multiplier par la probabilité d'avoir 1 pile et n-1 faces ou 1 face et n-1 piles ; b) loi du 1er succès...
- $\acute{\text{Ex}}$ . 9 : a) utiliser le système complet d'événements  $(Y=i)_{i\in\mathbb{N}}$  où Y désigne la V.A.R. égale au nombre de clients par jour ; b) même calcul après avoir calculé la nouvelle probabilité qu'un client paie à la caisse 1.

# ~◀ INDICATIONS POUR LES EXERCICES DU TD N°3 ▶~

- Ex. 1 : utiliser les probabilités composées pour trouver la loi.
- Ex. 2 : utiliser la formule des probabilités composées pour calculer  $\mathbb{P}(X=k)$ .
- Ex. 3 : a) décomposer (X=k) à l'aide de  $(X\geqslant k)$  et  $(X\geqslant k+1)$  ; b) calculer d'abord  $\mathbb{P}(X\leqslant k)$ , en déduire  $\mathbb{P}(X=k)$  et  $\mathbb{P}(X\geqslant k)$  puis utiliser a). Calculer  $\lim_{N\to +\infty}\mathbb{E}(X)$ .
- Ex. 4 : exprimer  $\mathbb{P}(X=n)$  en fonction de n et  $\mathbb{P}(X=0)$  puis déterminer  $\mathbb{P}(X=0)$
- Ex. 5 : 1. l'expression est un polynôme du second degré en x toujours positif donc...; 2. appliquer 1. avec  $c_k = \mathbb{P}(X = k)$
- Ex. 6 : a) probabilités composées et somme de la série exponentielle ; b) ok.
- Ex. 7 : 1) ok ; 2) a) choisir la case contenant les k-1 premières boules puis placer la k-ème ; b) même chose pour i-k boules ; c) utiliser le système complet d'événements  $(Y=k)_{k\geqslant 2}$  puis les sommes des séries de référence ; d) utiliser le système complet d'événements  $(Y=k)_{k\geqslant 2}$ .
- Ex. 8 : a) choisir un gagnant parmi n et multiplier par la probabilité d'avoir 1 pile et n-1 faces ou 1 face et n-1 piles ; b) loi du 1er succès...
- Ex. 9 : a) utiliser le système complet d'événements  $(Y=i)_{i\in\mathbb{N}}$  où Y désigne la V.A.R. égale au nombre de clients par jour ; b) même calcul après avoir calculé la nouvelle probabilité qu'un client paie à la caisse 1.