P. Sup. B/L Septembre 2025

TD n° 2 : Probabilités conditionnelles - Indépendance

Exercice 1

Le jeu des 3 portes : un jeu télévisé américain se déroule en 2 manches. Derrière les 3 portes sont cachées 2 marguerites et 1 Rolls. Le jeu se déroule en 2 manches. 1 ère manche : le candidat se place devant une des 3 portes. L'animateur renseigné par la régie ouvre une des 2 autres portes, faisant apparaître une marguerite. 2 ème manche : le candidat a le choix entre 2 stratégies : rester devant la même porte ou se mettre devant l'autre porte fermée.

- 1. Déterminer la probabilité de gagner la Rolls pour chacune des 2 stratégies.
- 2. L'adaptation française du jeu utilise n portes $(n \ge 4)$ et n-1 marguerites. Quelle est alors la probabilité de gagner la Rolls pour chacune des 2 stratégies? Quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'écart entre ces 2 probabilités?

Exercice 2

Un panier contient 40 crayons de couleurs blanc, jaune, noir, rouge. Il y a 10 crayons de chaque couleur. On tire un crayon au hasard et sans remise. Si sa couleur est c, on ajoute dans le panier 3 crayons de même couleur c puis on en tire un autre et ainsi de suite.

Déterminer la probabilité d'obtenir globalement en 10 tirages 1 crayon blanc, 2 crayons jaunes, 3 crayons noirs et 4 crayons rouges.

Exercice 3

- 1. Soient A et B deux événements. Montrer que, si $\mathbb{P}(A \mid B) \geqslant \mathbb{P}(A)$, alors $\mathbb{P}(B \mid A) \geqslant \mathbb{P}(B)$.
- 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 2n. Pierre en tire une au hasard, qu'il ne remet pas, puis Paul en tire une à son tour. Paul obtient un numéro compris entre n+1 et 2n. La probabilité que Pierre ait obtenu un numéro compris entre n+1 et 2n est-elle supérieure ou inférieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 4

Un test permet de dépister si une pièce est défectueuse. Il n'est cependant pas fiable absolument. Ce test donne pour défectueuse une pièce défectueuse dans 95 cas sur 100 et pour non défectueuse une pièce saine dans 90 cas sur 100.

Un lot de 100 pièces contient 8% de pièces défectueuses. On prend une des pièces du lot au hasard. La pièce choisie est déclarée défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle le soit vraiment?

Exercice 5

Un voyageur peut prendre le train ou l'avion. Si au jour n-1 il prend le train, la probabilité qu'il prenne l'avion au jour n est de $\frac{1}{2}$. Si au jour n-1 il prend l'avion, il prend le train au jour n. Soit p_n la probabilité que le voyageur prenne le train au jour n.

- 1. Établir une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1} .
- 2. Donner l'expression de p_n en fonction de n sachant qu'au premier jour le voyageur prend le train.

Exercice 6

Une maison comporte n pièces. La probabilité que j'y aie oublié mon parapluie est p ($p \in]0,1[$). Après avoir visité n-1 des n pièces sans succès, quelle est la probabilité que je trouve mon parapluie dans la dernière pièce?

Exercice 7

Dans une salle de jeux, il y a 3 machines M_1, M_2, M_3 . Les deux premières machines permettent de gagner avec des probabilités respectives $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$; la 3 ème machine est détraquée et fait perdre à coup sûr. Un joueur non averti choisit une machine au hasard et joue plusieurs fois de suite avec la même machine.

- 1. Quelle est la probabilité pour qu'il perde au 1er coup? 2 coups de suite? n coups de suite?
- 2. Ayant perdu 2 coups de suite, quelle est la probabilité d'avoir joué avec la machine détraquée?

Exercice 8

On suppose qu'un couple a la même probabilité d'avoir un garçon ou une fille à chaque naissance. M. et Mme Aléa ont deux enfants.

- 1. Quelle est la probabilité qu'ils aient une fille sachant qu'ils ont un garçon?
- 2. Quelle est la probabilité qu'ils aient une fille sachant que l'aîné est un garçon?

Exercice 9

Soit p un réel compris entre 0 et 1. Une personne lance une pièce et joue à pile ou face, elle a une probabilité p d'obtenir pile et 1-p d'obtenir face. Elle gagne dès qu'elle a obtenu deux piles de plus que de faces, elle perd dès qu'elle a obtenu deux faces de plus que de piles.

On note E_{2n} l'événement "la personne a obtenu autant de piles que de faces après 2n lancers sans avoir encore gagné" et $p_n = \mathbb{P}(E_{2n})$ pour $n \ge 1$.

- 1. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n puis en déduire la probabilité pour que la partie dure plus de 2n coups?
 - 2. a) Justifier que la personne ne peut gagner qu'au bout d'un nombre pair de lancers.
- b) On note G_{2n} l'événement "la personne gagne en 2n coups". Calculer $\mathbb{P}(G_{2n})$ puis la probabilité pour que la personne gagne?

Exercice 10

On dispose de deux urnes : l'urne U contient 1 boule blanche et 4 boules noires, l'urne V contient 3 boules blanches et 2 boules noires. Dans l'une des urnes choisie au hasard, on effectue une série de tirages d'une boule avec remise (tous les tirages ont lieu dans la même urne). Soit A_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche".

- 1. Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2)$. A_1 et A_2 sont-ils indépendants?
- 2. Calculer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3. Sachant que les n-1 premiers tirages donnent chacun une boule blanche, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche supplémentaire au tirage suivant?
- 4. Sachant que les n premières boules tirées sont blanches, quelle est la probabilité d'avoir tiré dans U ?

~◀ Indications pour les exercices du TD n°2 ▶~

- Ex. 1 : 1. et 2. pour la 2 ème stratégie, utiliser le système complet $\{M_1, \overline{M_1}\}$ où M_1 : "le joueur est devant une marguerite après la 1 ère manche".
- Ex. 2 : utiliser les probabilités composées en fixant d'abord un ordre fictif des couleurs puis "mélanger" les couleurs.
- Ex. 3 : 1. ok ; 2. utiliser la contraposée de a)
- Ex. 4 : formule de Bayes
- Ex. 5 : 1. utiliser la formule des probabilités totales ; 2. chercher λ pour que $(p_n + \lambda)$ soit géométrique ; conclure.
- Ex. 6 : si M désigne "mon parapluie est dans la maison", utiliser le système complet $\{M, \overline{M}\}$ pour décomposer les événements qui interviennent.
- Ex. 7 : 1. probabilités totales ; 2. formule de Bayes.
- Ex. 8 : utiliser $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$ où il y a équiprobabilité.
- Ex. 9 : 1. remarquer que, si E_{2n} est réalisé, il faut obtenir un pile et un face ensuite pour réaliser E_{2n+2} ; 2. a) exprimer G_{2n} à l'aide de E_{2n-2} ; b) utiliser 1. puis une réunion disjointe.
- Ex. 10 : 1. 2. probabilités totales ; 3. 4. utiliser 2.