TD n° 2 : Probabilités conditionnelles - Indépendance

Exercice 1

Soient 3 lots : le premier contient n_1 pièces dont m_1 sont défectueuses, le second n_2 dont m_2 sont défectueuses et le troisième n_3 dont m_3 sont défectueuses. On choisit un lot au hasard d'où l'on tire deux pièces. Si la première pièce tirée est défectueuse, quelle est la probabilité que la deuxième le soit aussi ?

Exercice 2

On considère une infinité d'urnes numérotées. La probabilité de choisir l'urne numéro n (avec $n \geqslant 1$) est égale à $\dfrac{1}{2^n}$ et l'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche. On choisit une urne puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 3

Une personne doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés dont une seule convient. Elle essaie les clés les unes après les autres. On cherche la probabilité p_k pour que la porte s'ouvre au bout du k-ième essai dans les deux cas suivants : a) la personne oublie, après chaque essai, quelle clé elle a essayée ; b) la personne écarte au fur et à mesure les clés qui ne conviennent pas.

Exercice 4

On cherche un parapluie qui se trouve dans l'un quelconque des 7 étages d'un immeuble avec la probabilité $\frac{p}{7}(p \in]0,1[)$. On a exploré en vain les 6 premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au 7 ème étage ?

Exercice 5

n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ contiennent chacune trois boules. Toutes les boules sont blanches, sauf une qui est noire. On ne sait pas dans quelle urne se trouve la boule noire.

a) On tire sans remise deux boules de U_1, quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux blanches ?

b) Sachant qu'on a tiré deux boules blanches de U_1, quelle est la probabilité que U_1 contienne la boule noire ? que U_2 contienne la boule noire ?

Exercice 6 (*TSE 2022*)

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une succession de n individus $A_1, \ldots, A_n$ se transmettent une information binaire du type "oui" ou "non". L'individu A_k transmet à A_{k+1} l'information qu'il a reçue avec la probabilité $p \in [0,1]$ ou la transforme en son contraire avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle détenue au départ par A_1.
2. En supposant $0 < p < 1$, déterminer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 7

On s'intéresse à la répartition des sexes des n enfants d'une famille donnée. On suppose que toutes les répartitions sont équiprobables. On note M l'événement "la famille a des enfants des deux sexes" et F l'événement "la famille a au plus une fille".
Étudier, pour $n = 2, n = 3$ puis dans le cas général, l'indépendance des événements M et F.

Exercice 8

Le quart d'une population a été vacciné contre la lèpre. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non-vaccinés.
a) Le vaccin a-t-il une efficacité quelconque ?
b) On sait en outre qu'il y a un malade sur douze parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée ?

Exercice 9 (*Ensae-Paris Saclay 2019*)

On considère une urne avec une boule blanche et une boule noire. Si on tire une boule blanche on a gagné et le jeu s'arrête. Si on tire une boule noire, on remet trois boules noires dans l'urne (y compris celle qu'on vient de tirer). On tire à nouveau, et si la boule est blanche c'est gagné, sinon on remet 3 boules noires (dont celle qu'on a tirée), et ainsi de suite...
On note E_n l'événement "gagner la partie avant le tirage n ou au n-ième tirage".

1. Montrer que : $\mathbb{P}(E_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$.
2. Montrer que pour tout réel x, on a : $e^{-x} \geqslant 1 - x$.
   En déduire que : $\mathbb{P}(E_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right)$.
3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n)$.

Exercice 10

A et B jouent au jeu suivant : A commence à jouer. Il lance deux dés cubiques honnêtes : si la somme des points obtenus est 6, A gagne. Sinon B lance les deux dés et il gagne si la somme des points obtenus est 7. Sinon A lance les deux dés et ainsi de suite. Vaut-il mieux être A ou B ?

~◀ Indications pour les exercices du TD n° 2 ▶~

Ex. 1 : probabilités totales en distinguant les lots.
Ex. 2 : probabilités totales en distinguant les urnes.
Ex. 3 : a) probabilités composées ou k-listes ; b) idem ou permutations.
Ex. 4 : appliquer la définition d'une probabilité conditionnelle.
Ex. 5 : a) probabilités totales en distinguant selon que la boule noire est dans U_1 ou non ; b) formule de Bayes.
Ex. 6 : probabilités totales puis suite arithmético-géométrique.
Ex. 7 : les résultats sont des n-listes de l'ensemble $\{F, G\}$.
Ex. 8 : a) comparer $P(V|M)$ et $P(V)$; b) formule de Bayes.
Ex. 9 : 1. calculer $\mathbb{P}(\overline{E_n})$; 2. étude de fonction et appliquer à $x = \frac{1}{2k}$; 3. ok par encadrement.
Ex. 10 : écrire l'événement "A gagne" comme une réunion dénombrable d'intersections d'événements indépendants, idem pour "B gagne".