

TD n° 1 : Espaces ProbabilisésExercice 1

1. Pourquoi, en lançant trois dés, a-t-on plus de chances d'obtenir un total de 10 points qu'un total de 9 points alors qu'il y a autant de façons d'obtenir ces deux totaux ?
2. Est-il plus facile d'obtenir au moins un double six en 24 lancers de deux dés que d'obtenir un six en 4 lancers d'un seul dé ?
3. Une urne contient n boules numérotées. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule portant le numéro 1 lorsqu'on tire une boule ? lorsqu'on tire p boules simultanément ?

Exercice 2

Dans une classe de 38 élèves, quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves fêtent leur anniversaire le même jour ? que deux élèves exactement fêtent leur anniversaire le même jour ?

Exercice 3

Un tiroir contient 10 paires de gants toutes différentes. On prend 4 gants au hasard. Quelle est la probabilité de tirer : a) deux paires complètes ? b) au moins une paire ? c) une paire et une seule ?

Exercice 4 Les danseurs de Chicago

- a) Dans une salle de danse, il y a n couples. Chaque femme doit choisir un cavalier au hasard. Quelle est la probabilité pour que chaque homme danse avec son épouse ?
- b) Dans la salle, il y a $2n$ chaises groupées deux par deux autour de n tables. Les danseurs s'assoient au hasard sur les $2n$ chaises. Quelle est la probabilité pour que chaque homme soit assis à côté de son épouse ?
- c) Une nouvelle danse est engagée. Quelle est la probabilité pour qu'aucun homme ne danse avec son épouse ? Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini ?

Exercice 5

On considère n équipes de football de ligue 1 et n équipes de ligue 2. On tire au sort n rencontres entre ces $2n$ équipes (chaque équipe joue un match et un seul).

- a) Calculer la probabilité p_n pour que tous les matchs opposent une équipe de ligue 1 à une équipe de ligue 2.
- b) Calculer la probabilité q_n pour que tous les matchs opposent 2 équipes de la même ligue.

Exercice 6

Ali et Ben jouent à pile ou face. Chacun lance n fois une pièce de monnaie équilibrée et le gagnant est celui qui obtient le plus de pile.

- a) Quelle est la probabilité d'un ex-æquo ?
- b) Quelle est la probabilité que Ben gagne ?

Exercice 7

On lance indéfiniment un dé honnête à six faces. On note A_i l'événement "le 6 est obtenu pour la 1ère fois au $i^{\text{ème}}$ lancer" et E l'événement "le 6 n'est jamais obtenu".

- a) Calculer $\mathbb{P}(A_i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, puis $\mathbb{P}(E)$.
- b) Quelle est la probabilité que le 1er numéro pair obtenu soit un 6 ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 avant un numéro impair ?

Indications pour les exercices du TD n° 1

Ex. 1 : 1) remarquer que $\{3, 3, 3\}$ est un résultat moins probable que $\{1, 4, 4\}$ lui-même moins probable que $\{1, 2, 6\}$; 2) utiliser les événements contraires; 3) ok.

Ex. 2 : considérer l'événement contraire; choisir les 2 élèves et leur attribuer un jour anniversaire puis attribuer des jours anniversaires différents aux autres.

Ex. 3 : a) combinaisons de gants pour les cas possibles, de paires pour les cas favorables; b) utiliser l'événement contraire; c) utiliser a) et b).

Ex. 4 : a) ok; b) pour les cas favorables, tenir compte des n tables possibles pour un couple donné et des deux places possibles autour d'une table; c) formule de Poincaré.

Ex. 5 : a) pour les cas possibles, on peut d'abord raisonner en tenant compte de l'ordre puis diviser par le nombre de permutations; b) distinguer n impair et n pair où le raisonnement fait pour les cas possibles est valable dans chaque ligue.

Ex. 6 : a) utiliser la réunion des événements A_k : "Ali et Ben obtiennent k Pile"; b) utiliser la symétrie des rôles joués par Ali et Ben et le a).

Ex. 7 : a) calculer $\mathbb{P}(A_i)$ puis $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right)$; b) décomposer l'événement en une réunion d'événements incompatibles utilisant le rang d'apparition du 1er 6; c) idem avant le rang d'apparition du 1er n° impair.

Indications pour les exercices du TD n° 1

Ex. 1 : 1) remarquer que $\{3, 3, 3\}$ est un résultat moins probable que $\{1, 4, 4\}$ lui-même moins probable que $\{1, 2, 6\}$; 2) utiliser les événements contraires; 3) ok.

Ex. 2 : considérer l'événement contraire; choisir les 2 élèves et leur attribuer un jour anniversaire puis attribuer des jours anniversaires différents aux autres.

Ex. 3 : a) combinaisons de gants pour les cas possibles, de paires pour les cas favorables; b) utiliser l'événement contraire; c) utiliser a) et b).

Ex. 4 : a) ok; b) pour les cas favorables, tenir compte des n tables possibles pour un couple donné et des deux places possibles autour d'une table; c) formule de Poincaré.

Ex. 5 : a) pour les cas possibles, on peut d'abord raisonner en tenant compte de l'ordre puis diviser par le nombre de permutations; b) distinguer n impair et n pair où le raisonnement fait pour les cas possibles est valable dans chaque ligue.

Ex. 6 : a) utiliser la réunion des événements A_k : "Ali et Ben obtiennent k Pile"; b) utiliser la symétrie des rôles joués par Ali et Ben et le a).

Ex. 7 : a) calculer $\mathbb{P}(A_i)$ puis $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right)$; b) décomposer l'événement en une réunion d'événements incompatibles utilisant le rang d'apparition du 1er 6; c) idem avant le rang d'apparition du 1er n° impair.