

TD n° 15 : Fonctions de deux variablesExercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles de f sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}$.

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 , puis étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Exercice 3

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de classe C^2 , qui vérifie la relation $f(x, y) = -f(y, x)$, pour tout couple (x, y) de \mathbb{R}^2 .

Montrer que l'on a, pour tout réel a , $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, a) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, a) = 0$.

Exercice 4

Soit F une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} avec $F(x, y) = (y - x) \exp(-(y - x))$.

1. Soit α un réel. Décrire les lignes de niveau α de F .
2. Calculer le maximum de la fonction F .

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 3y + 3.$$

1. Montrer que f possède un seul point critique.
2. Vérifier qu'en ce point, la fonction f a un minimum global.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - 1)^2 - (y + 1)^4.$$

1. Montrer que f possède un seul point critique.
2. Montrer que f n'a pas d'extremum en ce point critique.

Exercice 7 (*Ulm 2019*)

1. On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet un unique extremum local (i.e. en un point unique). Montrer que cet extremum est global.

2. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^2$$

- a) Calculer les dérivées partielles de g à l'ordre 1.
- b) Montrer que $(0, 0)$ est l'unique point critique de g .

- c) Montrer que $(0, 0)$ est un extremum local de g et en déterminer la nature.
- d) Montrer que $(0, 0)$ n'est pas un extremum global de g .
- e) Comparer avec le résultat de la question 1.

3. La conclusion de la question 1. est-elle toujours vraie si f n'est pas continue ?

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de f .
2. Écrire les conditions nécessaires pour avoir un extremum en $(x, y) \in \mathcal{D}$ et en déduire une équation vérifiée par x .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $g : t \mapsto t^2 - t \ln(t) - 1$ et en déduire que g s'annule en une seule valeur t_0 que l'on déterminera.
4. En déduire l'unique point critique de f et déterminer la nature de l'extremum éventuel.

Exercice 9

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$.

1. Déterminer les 5 points critiques de f .
2. En déduire les éventuels extremums locaux ou globaux de f .

Exercice 10

On cherche à approcher la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ à l'aide d'une fonction affine qui minimise l'aire entre les deux courbes. Pour ce faire, déterminer les réels a et b pour lesquels l'intégrale $I(a, b) = \int_0^1 (\sqrt{x} - ax - b)^2 dx$ est minimale. Vérifier que ce minimum est global.

~◀ INDICATIONS POUR LES EXERCICES DU TD N° 15 ▶~

Ex. 1 : 1. montrer que $|f(x, y)| \leq |xy|$; 2. montrer que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 2|y|$ et utiliser $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Ex. 2 : justifier que $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|^{\frac{1}{2}}$; étudier la limite des taux d'accroissements des fonctions partielles.

Ex. 3 : dériver la relation par rapport à y , puis x et utiliser le th. de Schwarz; idem en dérivant 2 fois.

Ex. 4 : 1. utiliser les variations de la fonction $f : t \mapsto te^{-t}$; 2. idem

Ex. 5 : 1. ok; 2. montrer que $f(x, y) - f(a, b) \geq 0$ où (a, b) est le point critique.

Ex. 6 : 1. ok; 2. montrer que f change de signe autour du point critique.

Ex. 7 : 1. raisonner par l'absurde et utiliser les propriétés des fonctions continues sur un segment; 2.

a) ok; b) ok c) ok avec $s^2 - rt$; d) calculer $f(1, -4)$ par exemple; e) ok; 3. trouver un c-exemple.

Ex. 8 : 1. ok; 2. exprimer y en fonction de x ; 3. dériver deux fois; 4. ok avec $s^2 - rt$.

Ex. 9 : 1. ok; 2. calculer $s^2 - rt$ et vérifier le caractère global le cas échéant.

Ex. 10 : calculer l'intégrale, chercher les points critiques puis utiliser les conditions du 2nd ordre; vérifier que $I(a, b) = \frac{1}{3} \left(a + \frac{3}{2}b - \frac{6}{5} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(b - \frac{4}{15} \right)^2 + \frac{1}{450}$.