TD n° 14 : Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère les vecteurs $e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$ et $e_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$.

1. Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est orthonormale.
2. Déterminer les vecteurs e_4 de $\mathbb{R}^4$ tels que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Montrer que si x, y, z sont des réels tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$, alors $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$.

Exercice 3

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels.

1. Démontrer que : $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose en outre que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k > 0$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

   Démontrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$ et étudier les cas d'égalité.

Exercice 4

Soit $n \geqslant 2$ et $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Soit $(e_1, \dots, e_n)$, n vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous $i \neq j$, $\|e_i - e_j\| = 1$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel et n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$.

1. Montrer que pour $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2\right)$.
2. En déduire que la famille $(e_i + u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$. Démontrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
Montrer que : 1) $F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$; 2) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$; 3) $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 8

$\mathbb{R}^n$ étant muni de son produit scalaire usuel, soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application telle que :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

1. Démontrer que l'image d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ par f est une base orthonormale.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 9

$E = \mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur unitaire.

1. Montrer que $f : x \in E \longmapsto x + a\langle u, x \rangle u$ est un endomorphisme de E.

2. Déterminer les éléments propres de f et déterminer si cet endomorphisme est diagonalisable.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique et F le plan vectoriel d'équation $x - 2y + 2z = 0$.

1. Déterminer un vecteur unitaire a de $D = F^\perp$ et en déduire la matrice B de la projection orthogonale q sur D dans la base $\mathcal{B}$.

2. En déduire la matrice A de la projection orthogonale p sur F dans $\mathcal{B}$.

Exercice 11 (*Ensae-i 2018*)

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$ un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

1. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.

2. Soit $u = (1, 1, 1, 3)$. Calculer la distance de u à F.

3. Donner une base de $F^\perp$.

Exercice 12 (*Ensae-Paris Saclay 2021*)

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. a) Démontrer que p est une projection et déterminer une base de $\operatorname{Ker} p$ et une base de $\operatorname{Im} p$.

b) Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation.

2. a) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer la distance de u au plan $\mathcal{P}$.

b) En déduire que : $\dfrac{|2x - y + z|}{\sqrt{6}} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

~◄ Indications pour les exercices du TD n° 14 ►~

Ex. 1 : 1. Ok ; 2. résoudre un système d'équations.

Ex. 2 : interpréter $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ comme le carré d'une norme et $x + y + z$ comme un produit scalaire puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Ex. 3 : 1. appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz en utilisant $u = (1, \ldots, 1)$ et le cas d'égalité ; 2. idem avec $(\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ et $\left(1/\sqrt{x_1}, \ldots, 1/\sqrt{x_n}\right)$

Ex. 4 : développer $\|e_i - e_j\|^2$ et en déduire la valeur de $\langle\, e_i, e_j \,\rangle$, puis montrer que la famille est libre en utilisant ce qui précède et la résolution d'un système linéaire.

Ex. 5 : 1. inégalité triangulaire pour majorer la norme de gauche, puis Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$ et $(\|u_1\|, \ldots, \|u_n\|)$; 2. montrer que la famille est libre en comparant les normes de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ et en utilisant 1.

Ex. 6 : montrer que la famille est orthogonale et conclure.

Ex. 7 : 1. ok ; 2. $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$... et réciproque ok ; 3. $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$ donc... puis utiliser les dimensions.

Ex. 8 : 1. ok en calculant $\langle\, f(e_i), f(e_j) \,\rangle$; 2. en déduire que $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle\, x, e_i \,\rangle f(e_i)$ puis la linéarité.

Ex. 9 : 1. ok ; 2. si $n \geqslant 2$, 1 est v.p. et $E_1 = \operatorname{Vect}\{u\}^\perp$, puis résoudre $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 1$.

Ex. 10 : 1. ok et $q(x) = \langle\, x, a \,\rangle a$; 2. $p + q = \mathrm{Id}$

Ex. 11 : 1. trouver une b.o.n. de F puis $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle\, x, e_i \,\rangle e_i$; 2. $\|u - p_F(u)\|$; 3. interpréter les équations cartésiennes définissant F comme des produits scalaires.

Ex. 12 : 1. a) ok avec A^2 ; b) vérifier $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$ puis utiliser $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$; 2. a) calculer et réduire $\|u - p(u\|$; b) Pythagore avec $u = u - p(u) + p(u)$.