TD n° 13 : Variables aléatoires à densité - Statistiques (2)

Exercice 1

Soit X une variable (discrète ou à densité) admettant une espérance et un moment d'ordre 2. Montrer qu'on a : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{\varepsilon^2}$, puis retrouver l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 2

Soit n un entier naturel strictement positif, soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ et soit $F = \dfrac{X}{n}$.

1) Déterminer l'espérance et la variance de F.

2) Déterminer n tel que $\mathbb{P}\big(|F - \mathbb{E}(F)| < 10^{-2}\big) \geqslant 0,98$.

Exercice 3

Soit $x > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{x}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ pour $n \geqslant 1$.

Montrer que : $\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant \dfrac{x^2}{n\alpha^2}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4

Un cinéma comporte deux salles contenant chacune n places. N personnes se présentent à l'entrée de ce cinéma. On admet que les choix des spectateurs sont indépendants les uns des autres et qu'un spectateur quelconque a une chance sur deux d'aller dans la première salle. On appelle X_1 la VAR égale au nombre de spectateurs choisissant la 1ère salle.

1. Montrer que la probabilité p que tous les spectateurs ne puissent pas voir le film qu'ils ont choisi vaut $\mathbb{P}\left(\left|X_1 - \dfrac{N}{2}\right| > n - \dfrac{N}{2}\right)$ si $n < N \leqslant 2n$. Que vaut-elle si $n \geqslant N$?

2. Comment le constructeur aurait-il dû choisir n si on sait que $N = 1000$ et si on veut que p soit inférieur à 0,01 ?

Exercice 5

On suppose que le paramètre p, qui exprime la probabilité qu'un individu contagieux transmette le virus à un individu sain, est inconnu, et on cherche à l'estimer. Pour tout entier m supérieur ou égal à 1, on considère un m-échantillon $(Y_1, \dots, Y_m)$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p.

1. On pose $\overline{Y}_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} Y_i$. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(|\overline{Y}_m - p| \geqslant \varepsilon) = 0$.

2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\left[\overline{Y}_m - \sqrt{\dfrac{5}{m}}, \overline{Y}_m + \sqrt{\dfrac{5}{m}}\right]$ est un intervalle de confiance de p à un niveau de confiance au moins égal à 0,95.

Exercice 6

Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels à valeurs dans $[0, 1]$ et soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_i.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ et $m_n = \dfrac{1}{n}(p_1 + \dots + p_n)$.

1. Prouver que : $\forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \varepsilon) = 1$.

2. Montrer que si $(m_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de limite m, alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n - m| < \varepsilon) = 1.$$

Ex. 1 : appliquer l'inégalité de Markov à X^2, puis l'inégalité obtenue à $X - \mathbb{E}(X)$.

Ex. 2 : 1. ok ; 2. utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Ex. 3 : utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Ex. 4 : 1. $N - X_1$ est le nombre de spectateurs qui choisissent la 2ème salle... ; 2. utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Ex. 5 : 1. loi faible des grands nombres ; 2. ok en majorant $p(1-p)$.

Ex. 6 : 1. utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ; 2. utiliser $|m_n - m| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand, l'inégalité triangulaire pour majorer $\mathbb{P}(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon)$ et le 1.

~◀ INDICATIONS POUR LES EXERCICES DU TD N° 13 ▶~

Ex. 1 : appliquer l'inégalité de Markov à X^2, puis l'inégalité obtenue à $X - \mathbb{E}(X)$.

Ex. 2 : 1. ok ; 2. utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Ex. 3 : utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Ex. 4 : 1. $N - X_1$ est le nombre de spectateurs qui choisissent la 2ème salle... ; 2. utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Ex. 5 : 1. loi faible des grands nombres ; 2. ok en majorant $p(1-p)$.

Ex. 6 : 1. utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ; 2. utiliser $|m_n - m| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand, l'inégalité triangulaire pour majorer $\mathbb{P}(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon)$ et le 1.