TD n° 12 : Variables aléatoires à densité (1)

Exercice 1

Soit X une VAR continue suivant une loi uniforme sur $[1, 2]$. Déterminer la loi de la VAR $Y = e^{X^2-1}$.

Exercice 2 (*Loi de Cauchy de paramètre* 1)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

a) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit X une V.A.R. admettant pour densité f. Déterminer sa fonction de répartition puis, si elles existent, son espérance et sa variance. Calculer $\mathbb{P}(X^2 - X < 0)$.

c) Déterminer la loi de la V.A.R. $Y = \operatorname{Arc}\tan X$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle de densité continue f avec $f > 0$ sur $\mathbb{R}$. Soit F la fonction de répartition de X.

Calculer $\mathbb{E}(F(X))$ et $V(F(X))$ et montrer que $F(X) \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire réelle continue suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Quelle est la probabilité pour que l'équation en t : $t^2 - 2Xt + 1 = 0$

a. ait deux racines réelles distinctes ?

b. ait une racine double ?

Exercice 5

Une personne prend soit le métro, soit le bus pour aller à son travail. Elle prend le métro si elle attend plus de λ minutes le bus.

Le temps d'attente du bus suit une loi exponentielle T de paramètre λ. Soit A l'événement "la personne prend le bus".

a) Calculer $\mathbb{P}(A)$.

b) Soit S_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tickets utilisés en n jours sachant qu'il faut un ticket pour le métro et un ticket de plus quand l'usager prend le bus mais que le bus est plus agréable. Quelle est la loi et l'espérance de S_n ?

Exercice 6

Toutes les V.A.R. sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit X une V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et soit F sa fonction de répartition. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha(1 - F(t)) = 0$.

Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$.

Déterminer la loi de U_n, son espérance et sa variance.

3. Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$. On suppose N indépendante des $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et on définit la variable aléatoire U par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ U(\omega) = \min_{1\leqslant k\leqslant N(\omega)} X_k(\omega).$$

Déterminer la fonction de répartition de U puis son espérance à l'aide de 1.

Exercice 7

1. Calculer $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1 - t)^q\,\mathrm{d}t$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

2. Un restaurateur reçoit N réservations de clients qui doivent arriver entre 20 heures et 21 heures. On suppose que les clients arrivent de manière indépendante et que l'heure d'arrivée de chaque client suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ (on prend 20 heures pour origine).

a) Soit C_t la V.A. égale au nombre de clients arrivant avant l'instant t. Calculer $\mathbb{P}(C_t = k)$.

b) Soit T_k la V.A. égale à l'heure d'arrivée du k-ième client. Déterminer la fonction de répartition de T_k et en déduire la densité de T_k.

c) Calculer l'espérance de T_k.

Exercice 8

La distribution des notes obtenues à un concours suit approximativement une loi $\mathcal{N}(32,3;8,5^2)$ (les notes variant de 0 à 60). 30% des élèves ne sont pas admissibles et 10% sont “grands admissibles” et ne passent pas l'oral. Entre quelles limites doit varier la note d'un candidat pour qu'il soit admissible et puisse passer l'oral ?

Exercice 9 (*Ensae-Paris Saclay 2021*)

Des personnes se présentent successivement à un guichet. On note T_n la VAR qui donne l'heure d'arrivée de la n-ième personne.

On admet qu'une densité de T_n est $f_n : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

1. a) Quelle loi obtient-on si $n = 1$?
b) Démontrer par récurrence que f_n est une densité de probabilité.
2. T_n admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. Soit $F_n : x \longmapsto \begin{cases} 1 - e^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Montrer que F_n est la fonction de répartition de T_n.
4. a) Soit N le nombre de personnes passées par le guichet sur l'intervalle de temps $[0,t]$ $(t > 0)$. Montrer que $\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t)$ et $\mathbb{P}(N \geqslant n) = \mathbb{P}(T_n \leqslant t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Montrer que N suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ et déterminer α.

Exercice 10 (*Ensae-Paris Saclay 2021*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire X^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité et donner une densité de X^2.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X^n est une variable aléatoire à densité.
3. Montrer que, pour tout réel x, la suite $(F_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite qu'on note $F(x)$.
4. F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ou discrète ?

Exercice 11

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.
On note φ et Φ respectivement une densité et la fonction de répartition de X (donc de Y).
On définit $Z = \sup(X, Y)$.

1. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de Z en fonction de φ et Φ.
2. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi. En déduire la variance de Z.

~◀ Indications pour les exercices du TD n° 12 ▶~

Ex. 1 : calculer la fonction de répartition puis dériver pour avoir une densité.
Ex. 2 : a) ok ; b) ok ; c) déterminer la fonction de répartition puis dériver pour avoir une densité.
Ex. 3 : ne pas oublier que $F' = f$ et que F est bijective.
Ex. 4 : calculer le discriminant puis calculer les probabilités demandées.
Ex. 5 : a) $A = (T \leqslant \lambda)$ d'où... ; b) $S_n = n + X_n$ où X_n est le nombre de fois où la personne a pris le bus.
Ex. 6 : 1. I.P.P. ; 2. calculer $\mathbb{P}(U_n > x)$ et reconnaître une loi classique ; 3. calculer d'abord $\mathbb{P}(U > x)$ à l'aide des probabilités totales et du système complet $(N = n)_{n\geqslant 1}$.
Ex. 7 : 1. I.P.P. ; 2. a) loi binomiale ; b) exprimer $(T_k \leqslant t)$ à l'aide de C_t ; c) utiliser 1.
Ex. 8 : utiliser la loi normale centrée réduite.
Ex. 9 : 1. a) cf. cours ; b) ok avec I.P.P. ; 2. utiliser 1. b) ; 3. vérifier que $F_n' = f_n$; 4. a) ok ; b) $(N = n) = (N \geqslant n) \setminus (N \geqslant n+1)$...
Ex. 10 : 1. calculer la fonction de répartition puis dériver ; 2. idem 3. distinguer $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$; 4. calculer $\lim\limits_{+\infty} F$.
Ex. 11 : 1. montrer que la fonction de répartition de Z est Φ^2 ; 2. calculer $\mathbb{E}(Z)$ à l'aide d'une I.P.P. ; 3. vérifier que les fonctions de répartition de Z^2 et X^2 sont égales et conclure en utilisant les moments de X.