TD n° 11 : Intégrales généralisées

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(x)-1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,; \quad I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)^2}\,; \quad I_3 = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x\,; \quad I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exercice 2

Étudier la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur en cas de convergence ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,; \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t\,; \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos^\alpha(x)}\mathrm{d}x$$

Exercice 3

Trouver une fonction f continue, $\geqslant 0$ sur $[1,+\infty[$ telle que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Exercice 4

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes ($a \in \mathbb{R}$) :

$$I = \int_1^{+\infty} t^a e^{-t}\,\mathrm{d}t;\ J = \int_0^1 \frac{\sqrt{\sin(x)}}{e^x - \cos(x)}\mathrm{d}x;\ K = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\mathrm{d}x; M = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t;$$

$$N = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}};\ O = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{|\ln(x)|}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5

a) Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[1,+\infty[$.

b) Soit $h : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x)}{2}$. Montrer que h est bornée sur $[1,+\infty[$ en utilisant a).

Exercice 6

Soit Γ la fonction réelle définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de Γ et démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7

Pour tout couple (n,p) d'entiers positifs ou nuls, on pose : $I(n,p) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^n(t)}{t^p}\,\mathrm{d}t$.

a) Étudier la convergence de $I(n,p)$ selon les valeurs de n et p.

b) On suppose $p \geqslant 2$, trouver une relation de récurrence entre $I(n+1,p)$ et $I(n,p)$.

c) Calculer $I(n,p)$ pour $p \geqslant 2$.

Exercice 8 (*Ensae-Paris-Saclay*)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. Pour tout entier naturel k, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'intégrale I_k est convergente pour tout entier k et déterminer sa valeur.

3. En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 9 (*Ensae-Paris-Saclay*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$. On admet qu'un équivalent simple de W_n quand n tend vers $+\infty$ est $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x; J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x; K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que ces intégrales existent.
2. En effectuant dans J_n le changement de variable $x = \sin t$, montrer que $J_n = W_{2n+1}$.
3. En effectuant dans K_n le changement de variable $x = \tan t$, montrer que $K_n = W_{2n-2}$.
4. Exprimer I_n à l'aide de I_1.
5. On admet que, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a : $1 - y \leqslant e^{-y} \leqslant \dfrac{1}{1+y}$. En déduire que $J_n \leqslant I_n \leqslant K_n$.
6. Déduire de ce qui précède la valeur de I_1.

∼◀ INDICATIONS POUR LES EXERCICES DU TD N° 11 ▶∼

Ex. 1 : utiliser pour I_1 et I_3 le prolongement par continuité de la fonction intégrée, pour I_2 et I_4 des primitives.
Ex. 2 : J : IPP ; K et L : utiliser une primitive.
Ex. 3 : chercher parmi les fonctions de Riemann ou celles qui s'en déduisent simplement.
Ex. 4 : I : comparer à $\frac{1}{x^2}$; J : équivalent en 0 ; K : équivalent en $\pm\infty$; M : équivalent en 0 et $+\infty$; N : équivalent en 0 et 1 ; O : prolongement par continuité en 0, équivalent en 1^+ et 1^-, en $+\infty$ comparer avec e^{-x}.
Ex. 5 : a) majorer $|f(x)-\ell|$ puis $|f(x)|$ sur $[A,+\infty[$ et conclure ; b) écrire $h(x)$ sous la forme d'une seule intégrale et montrer que, sur $[1,+\infty[$, l'intégrale de la nouvelle fonction est convergente.
Ex. 6 : a) en 0 : équivalent ; en $+\infty$: *cf.* ex. 4 I ; b) IPP ; c) récurrence.
Ex. 7 : a) comparer à des fonctions de Riemann ; b) IPP ; c) récurrence.
Ex. 8 : 1. utiliser des équivalents de $f : t \longrightarrow \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ en 0 et 1 ; 2. utiliser une IPP en dérivant $\ln$; 3. utiliser un développement en série de $\frac{1}{1-t^2}$ pour $t \in]0;1[$ puis couper la somme en deux et montrer que l'intégrale du reste de la série tend vers 0 en majorant $t \longmapsto t^2 f(t)$ prolongée sur $[0,1]$.
Ex. 9 : 1. pour I_n comparaison avec $\frac{1}{x^2}$, pour K_n prendre un équivalent ; 2. ok ; 3. se souvenir que $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$; 4. utiliser le changement de variable $t=\sqrt{n}\,x$; 5. prendre $y=x^2$, élever à la puissance n et intégrer des inégalités ; 6. encadrer $\frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$ puis passer à la limite et utiliser 4.

∼◀ INDICATIONS POUR LES EXERCICES DU TD N° 11 ▶∼

Ex. 1 : utiliser pour I_1 et I_3 le prolongement par continuité de la fonction intégrée, pour I_2 et I_4 des primitives.
Ex. 2 : J : IPP ; K et L : utiliser une primitive.
Ex. 3 : chercher parmi les fonctions de Riemann ou celles qui s'en déduisent simplement.
Ex. 4 : I : comparer à $\frac{1}{x^2}$; J : équivalent en 0 ; K : équivalent en $\pm\infty$; M : équivalent en 0 et $+\infty$; N : équivalent en 0 et 1 ; O : prolongement par continuité en 0, équivalent en 1^+ et 1^-, en $+\infty$ comparer avec e^{-x}.
Ex. 5 : a) majorer $|f(x)-\ell|$ puis $|f(x)|$ sur $[A,+\infty[$ et conclure ; b) écrire $h(x)$ sous la forme d'une seule intégrale et montrer que, sur $[1,+\infty[$, l'intégrale de la nouvelle fonction est convergente.
Ex. 6 : a) en 0 : équivalent ; en $+\infty$: *cf.* ex. 4 I ; b) IPP ; c) récurrence.
Ex. 7 : a) comparer à des fonctions de Riemann ; b) IPP ; c) récurrence.
Ex. 8 : 1. utiliser des équivalents de $f : t \longrightarrow \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ en 0 et 1 ; 2. utiliser une IPP en dérivant $\ln$; 3. utiliser un développement en série de $\frac{1}{1-t^2}$ pour $t \in]0;1[$ puis couper la somme en deux et montrer que l'intégrale du reste de la série tend vers 0 en majorant $t \longmapsto t^2 f(t)$ prolongée sur $[0,1]$.
Ex. 9 : 1. pour I_n comparaison avec $\frac{1}{x^2}$, pour K_n prendre un équivalent ; 2. ok ; 3. se souvenir que $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$; 4. utiliser le changement de variable $t=\sqrt{n}\,x$; 5. prendre $y=x^2$, élever à la puissance n et intégrer des inégalités ; 6. encadrer $\frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$ puis passer à la limite et utiliser 4.