TD n° 10 : Développements limités

Exercice 1

Écrire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :
$f(x) = (1+x)(1-2x)^2$; $g(x) = \cos(x) - e^x$; $h(x) = (\sin(x))^3$; $i(x) = (\cos(x)-e^x)^3 + \sqrt{1-x}$.

Exercice 2

Écrire un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de :
$j(x) = \sin(x)\cos(x)$; $k(x) = e^x(\sin(x))^2$; $\ell(x) = \sqrt[3]{1+x}\ln(1+x)$.

Exercice 3

Écrire un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de :
$m(x) = \dfrac{x - \ln(1+3x)}{\sin(6x)}$ $(n=2)$; $n(x) = e^{2\cos(x)}$ $(n=4)$; $p(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+2x})$ $(n=3)$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$et $f : x \longmapsto (e^x - 1)^n$. Calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Exercice 5

Déterminer : a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\ln(\sin(x))}\right)$.

Exercice 6

Soit $a > 0$, $b > 0$ deux réels fixés. Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+(a+b)x)^{\frac{1}{x}} - (1+ax)^{\frac{1}{x}}(1+bx)^{\frac{1}{x}}}{x}$

Exercice 7 (*TSE 2022*)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{xe^x - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle g ce prolongement.
3. Montrer que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ en 0 au graphe $\mathcal{C}$ de g, et préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

Exercice 8

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln n$.

1. Déterminer le développement limité à lordre 2, au voisinage de 0, de $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.
2. En déduire un équivalent de $w_n - w_{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente, puis que la suite (w_n) converge et en déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Exercice 9

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = e^{u-u^2}$.
Calculer $g'(u)$, $g''(u)$ puis, en utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer le développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x+2} e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.
b) Déterminer l'asymptote oblique Γ de la fonction f lorsque x tend vers $\pm\infty$ et indiquer dans chaque cas la position relative du graphe de f par rapport à Γ.

~◄ Indications pour les exercices du TD n° 10 ►~

Ex. 1 : pour f développer et ordonner ; pour g et i utiliser les DL connus ; pour h donner un équivalent et conclure .
Ex. 2 : utiliser les DL connus et faire les produits.
Ex. 3 : composer les DL connus sans oublier la condition "$u(0) = 0$".
Ex. 4 : donner un équivalent et conclure.
Ex. 5 : utiliser des DL du numérateur et du dénominateur après s'être ramené en 0, pour trouver un équivalent.
Ex. 6 : déterminer d'abord un DL du numérateur à l'ordre 1.
Ex. 7 : 1. faire un produit de DL en développant suffisamment au numérateur et au dénominateur pour anticiper les simplifications ; 2. et 3. ok grâce à 1. ; 4. idem et étudier le signe de $g(x) - (ax + b)$ grâce à un équivalent.
Ex. 8 : 1. $\dfrac{x}{1+x} = x \times \dfrac{1}{1+x}$; 2. calculer $w_n - w_{n+1}$ puis utiliser $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; 3. critère d'équivalence, puis exprimer w_n comme somme partielle d'une série ; écrire $w_n = \ell + o(1)$ puis exprimer v_n en fonction de n et ℓ.
Ex. 9 : 1. ok ; 2. a) ok ; 2. b) calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; 2. c) poser $u = \dfrac{1}{x}$ puis développer $h(u) = f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ au voisinage de 0 et conclure en revenant à $f(x)$.

~◄ Indications pour les exercices du TD n° 10 ►~

Ex. 1 : pour f développer et ordonner ; pour g et i utiliser les DL connus ; pour h donner un équivalent et conclure .
Ex. 2 : utiliser les DL connus et faire les produits.
Ex. 3 : composer les DL connus sans oublier la condition "$u(0) = 0$".
Ex. 4 : donner un équivalent et conclure.
Ex. 5 : utiliser des DL du numérateur et du dénominateur après s'être ramené en 0, pour trouver un équivalent.
Ex. 6 : déterminer d'abord un DL du numérateur à l'ordre 1.
Ex. 7 : 1. faire un produit de DL en développant suffisamment au numérateur et au dénominateur pour anticiper les simplifications ; 2. et 3. ok grâce à 1. ; 4. idem et étudier le signe de $g(x) - (ax + b)$ grâce à un équivalent.
Ex. 8 : 1. $\dfrac{x}{1+x} = x \times \dfrac{1}{1+x}$; 2. calculer $w_n - w_{n+1}$ puis utiliser $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; 3. critère d'équivalence, puis exprimer w_n comme somme partielle d'une série ; 4. écrire $w_n = \ell + o(1)$ puis exprimer v_n en fonction de n et ℓ.
Ex. 9 : 1. ok ; 2. a) ok ; 2. b) calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; 2. c) poser $u = \dfrac{1}{x}$ puis développer $h(u) = f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ au voisinage de 0 et conclure en revenant à $f(x)$.