Soutien n° 9 : Intégrales généralisées

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

- Comme $\frac{1}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et comme les fonctions sont continues et positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.
- Si f est continue sur $[1, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, alors $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ ne converge pour aucune valeur du réel a .
- Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} f(t) dt = 0$.

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x} dx ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \sin(x) - e^{-x}}{(1+x+x^2)^{\frac{5}{2}}} dx ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{e^x} dx$$

Exercice 3

Étudier, suivant les valeurs du réel a , l'existence de l'intégrale : $\int_0^2 \frac{a^2 \ln(1+t) + 1 - e^{at}}{t^3} dt$.

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{(x^2 - 1)^\alpha} dx$?

Exercice 5

Prouver la convergence des intégrales suivantes et donner leur valeur :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arc tan}(x)}{1+x^2} dx ; \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \quad (\text{poser } t = \sqrt{1+e^x})$$

Exercice 6

Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$ converge et, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que $I = 0$.

Exercice 7

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln^p(t) dt$.

- Montrer que $I_{n,p}$ converge.
- Établir une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n,p-1}$ pour $p \geq 1$ et en déduire la valeur de $I_{n,p}$.

Exercice 8

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, de classe C^1 , telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \geq \alpha$. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx$ diverge.

Exercice 9

Montrer que les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$ sont convergentes et égales.