Soutien n° 9 : Intégrales généralisées

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Comme $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et comme les fonctions sont continues et positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
2. Si f est continue sur $[1,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ ne converge pour aucune valeur du réel a.
4. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x\ ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+3x^2+x}}\,\mathrm{d}x\ ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ puis calculer $F(x)$ pour $x \geqslant 1$.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 4

Déterminer la nature de $I(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Prouver la convergence des intégrales suivantes et donner leur valeur :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \quad (\textit{poser } t = e^x)\ ; \qquad J = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad (\textit{poser } t = \sqrt{x})$$

Exercice 6

Soit $a > 0$. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, puis calculer I à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{a^2}{t}$.

Exercice 7

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$.
3. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n.

Exercice 8

1. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Trouver les réels a, b et c tels que : $\forall t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{1+t^2}$.
3. Calculer l'intégrale I. (*On utilisera notamment une intégration par parties, ainsi que la décomposition précédente.*)