Soutien n° 8 : Développements limités

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Les coefficients de la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $\ln(1-u)$ au voisinage de 0 sont tous négatifs.
2. Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(x)$ au voisinage de 0 est : $\ln(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
3. $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3\ln(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 à droite.
4. Si f admet pour $DL_2(0)$, $f(x) = 2 - 3x - x^2 + o(x^2)$, alors la courbe représentant f se situe au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 2

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = \ln(1+x)\cos(x)$; b) $g(x) = xe^{2x+1}$; c) $h(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$; d) $i(x) = \ln(1+\sin(x))$.

2. En utilisant un développement limité à un ordre convenable, donner un équivalent simple en 0 de :

   a) $f(x) = e^x - \cos(x) - \sin(x)$; b) $g(x) = (x-1)e^x + 1$; c) $h(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x+1} + x$.

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right)$

Exercice 4

Écrire un développement limité à l'ordre n, au voisinage de a, de :

a) $f(x) = \dfrac{x - \sin(x)}{1-\cos(x)}$ $\quad(a = 0,\ n = 3)$; b) $g(x) = \sin(x)$ $\quad(a = \dfrac{\pi}{4},\ n = 2)$

c) $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ $\quad(a = 1,\ n = 3)$.

Exercice 5

On pose, pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

1. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
3. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 6

Déterminer si la courbe représentant la fonction $f : x \longmapsto x\big(\ln(2x+1) - \ln(x)\big)$ possède une asymptote oblique en $+\infty$, puis donner la position de la courbe C_f par rapport à cette éventuelle asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7

Déterminer la nature des séries de terme général $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1$ et $v_n = \dfrac{(n+1)^{\frac{1}{3}} - (n-1)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{n}}$.