Soutien n° 8 : Développements limités

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Les coefficients de la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $\ln(1-u)$ au voisinage de 0 sont tous négatifs.
2. Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(x)$ au voisinage de 0 est : $\ln(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
3. $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3\ln(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 à droite.
4. Si f admet pour $DL_2(0)$, $f(x) = 2 - 3x - x^2 + o(x^2)$, alors la courbe représentant f se situe au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 2

1. Écrire un développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de :
   a) $f(x) = \big(x - \ln(1+x)\big)\times\big(e^x - \cos(x)\big)$
   b) $g(x) = \big(\sin(x)\big)^2\times\big(\sqrt{1-2x} - 1\big)$
2. En déduire $f^{(k)}(0)$ et $g^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1}$

Exercice 4

Écrire un développement limité à l'ordre n, au voisinage de a, de :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - \sin(x)}{\ln(1+x)}$ $\quad (a = 0,\ n = 2)$; b) $g(x) = \cos(x)$ $\quad (a = \dfrac{\pi}{2},\ n = 3)$

c) $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad (a = 1,\ n = 3)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.

1. Déterminer la valeur qu'il convient de donner à $f(1)$ pour que f ainsi définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ soit continue.
2. f est-elle alors dérivable en 1 ?

Exercice 6

En posant $X = \dfrac{1}{x}$ et en développant $g(X) = f(x)$ au voisinage de $X = 0$, étudier les branches infinies de $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Exercice 7

Déterminer les réels a et b pour que $f(x) = ax + b - (16x^4 + x^3 + 1)^{\frac{1}{4}}$ ait pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 8

Déterminer la nature des séries qui ont pour terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ et $v_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.