Soutien n° 7 : Réduction des endomorphismes

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. 0 est valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, mais pas la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Tout automorphisme d'un $\mathbb{R}$-e.v. E de dimension finie est diagonalisable.
5. Tout endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-e.v. E de dimension finie est bijectif.
6. Si 1 est valeur propre de $A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors 1 et -1 sont valeurs propres de A, et réciproquement.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

Exercice 3

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? On discutera, le cas échéant, suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c, d :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, on définit $f(P)$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = (2x+1)P(x) - (x^2-1)P'(x)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$.
2. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
4. Montrer que A est diagonalisable. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 2$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x],\ \varphi(P) : x \longmapsto 2xP'(x) - P''(x).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer les valeurs propres de φ. φ est-il diagonalisable ?

Exercice 7

Soit $B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser la matrice B.
2. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisables telles que $A^2 = B$ après avoir montré qu'on peut trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres communs à A et B.

Exercice 8

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 - M - 2I_3$ et en déduire les valeurs propres possibles de M.
2. Montrer que M est diagonalisable et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n peut s'écrire : $M^n = a_nM + b_nI_3$ où $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

1. Donner un exemple d'une telle matrice pour $n = 2$.
2. A est-elle diagonalisable ?