Soutien n° 7 : Réduction des endomorphismes

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. 0 est valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, mais pas la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Tout automorphisme d'un $\mathbb{R}$-e.v. E de dimension finie est diagonalisable.
5. Tout endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-e.v. E de dimension finie est bijectif.
6. Si 1 est valeur propre de $A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors 1 et -1 sont valeurs propres de A, et réciproquement.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

Exercice 3

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? On discutera, le cas échéant, suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ D = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$. Calculer $\mathrm{rg}(J)$, puis montrer que J est diagonalisable sans utiliser une réduite de Gauss.

Exercice 5

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{a+b}{2} I + \dfrac{b+c}{2} J \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que 0 et 1 sont valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 2$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \ \varphi(P) : x \longmapsto P(x) - (x+1)P'(x).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer les valeurs propres de φ. φ est-il diagonalisable ?

Exercice 7

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à une matrice M associe sa transposée ${}^{\mathrm{t}}M$.

1. Déterminer $f \circ f$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de f. Vérifier que ce sont effectivement des valeurs propres de f.

Exercice 8

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3 et en déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? A est-elle diagonalisable ?