Soutien n° 6 : Sommes directes - Projections - Symétries

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1) Si E et F sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, alors tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ vérifie $x \in E$ ou $x \in F$.

2) Si p est une projection de E, $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, alors $p^3 = p$.

3) Si $f \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et si $f^3 = f$, alors f est une projection ou une symétrie.

4) Toute projection de E, $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, peut s'exprimer à l'aide de deux symétries.

Exercice 2

On pose $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $F = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, puis décomposer le vecteur (x,y,z) dans la somme directe.

Exercice 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur λ, les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}\{(\lambda,\lambda,1)\}$ et $\text{Vect}\{(1,\lambda,1),(2,1,1)\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, tel que $f^2 + 2f - 3\,\text{Id}_E = 0$ où $f^2 = f \circ f$.
Montrer que : $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 3\,\text{Id}_E)$.

Exercice 5

Soient $u_1 = (1,0,-2)$, $u_2 = (2,1,1)$ et $u_3 = (1,1,-1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On pose $E = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ et $F = \text{Vect}\{u_3\}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

2. Expliciter la projection p sur E parallèlement à F en calculant $p((x,y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que s est une symétrie vectorielle et déterminer ses éléments : $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id})$.