Soutien n° 6 : Sommes directes - Projections - Symétries

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Si E et F sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, alors tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ vérifie $x \in E$ ou $x \in F$.

2. Si p est une projection de E, $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, alors $p^3 = p$ i.e. $p \circ p \circ p = p$.

3. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et si $f^3 = f$, alors f est une projection ou une symétrie.

4. Toute projection de E, $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, peut s'exprimer à l'aide de deux symétries.

Exercice 2

Soient E et F les s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ définis par : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = y \text{ et } t = x\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = -y \text{ et } t = -x\}$.

Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$, puis décomposer le vecteur (x, y, z, t) dans la somme directe.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on considère les s.e.v. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(-x)\}$, $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$.

Montrer que la somme $E + F + G$ est directe.

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, tel que $f^3 = f$ i.e. $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que : $E = \mathrm{Im}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 5

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 2)\}$.

1. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. Déterminer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la projection p sur F parallèlement à G, puis par la projection q sur G parallèlement à F.

Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f((x, y)) = (7x - 12y, 4x - 7y)$.

1. Montrer que f est une symétrie et préciser ses éléments : $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $F = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

2. En déduire l'expression de la projection p sur E, parallèlement à F.