

Soutien n° 5 : Fonctions polynômes

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Deux polynômes unitaires de même degré et ayant les mêmes racines sont égaux.
2. Si P est un polynôme de degré 3 admettant $-1, 1$ et 2 pour racines, alors on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; le coefficient dominant du polynôme $P : x \mapsto (x + 1)^n + (1 - x)^n$ est $2n$.
4. Si $\deg P = \deg P'$, alors $P = P'$.

Exercice 2

Déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun des polynômes suivants :

$$P : x \mapsto (x + 2)^n - (x + 3)^n ; Q : x \mapsto \prod_{k=0}^n (2x - k) ; R : x \mapsto \prod_{k=0}^n (x - 2)^k.$$

Exercice 3

Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $B : x \mapsto x^2 - 2ax + a$ divise $A : x \mapsto x^3 - ax + a$?

Exercice 4

Démontrer que $P : x \mapsto 2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 5x + 1$ est divisible par $x \mapsto (x + 1)^3$. Quel est l'ordre de la racine -1 ?

Exercice 5

Soit P_n le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (1+x)(1-x^n) + (2-n)x^n - n^2x^n(1-x) + n - 2$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1. Développer et ordonner P_n .
2. Montrer que 1 est racine double du polynôme P_n .

Exercice 6

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tels que :

$$\text{a) } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = xP'(x) \quad \text{b) } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (2x + 1)P'(x).$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme P vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) - P(x) = x^n$, et exprimer ses coefficients à l'aide de factorielles.

Exercice 8

Factoriser le polynôme $P : x \mapsto -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$ et dresser son tableau de signe sur \mathbb{R} .

Exercice 9

Factoriser le polynôme $P : x \mapsto 18x^3 - 33x^2 + 20x - 4$ sachant qu'il admet une racine multiple.