Soutien n° 5 : Fonctions polynômes

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1) Deux polynômes unitaires de même degré et ayant les mêmes racines sont égaux.

2) Si P est un polynôme de degré 3 admettant $-1, 1$ et 2 pour racines, alors on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x^2-1)(x-2)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; le coefficient dominant du polynôme $P : x \longmapsto (x+1)^n + (1-x)^n$ est $2n$.

4) Si $\deg P = \deg P'$, alors $P = P'$.

Exercice 2

Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$. Montrer que P est le carré d'un polynôme Q à déterminer.

Exercice 3

On considère la suite de polynômes définie par : $P_0 = 1, P_1 : x \longmapsto -2x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+2}(x) = -2xP_{n+1}(x) - 2(n+1)P_n(x)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme de degré n, puis déterminer le coefficient dominant de P_n.

2. Déterminer le coefficient constant de P_n.

Exercice 4

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, le polynôme $P_n : x \longmapsto (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ peut se factoriser sous la forme $P_n(x) = x(x+1)(2x+1)Q(x)$ où $Q \in \mathbb{R}[x]$.

Exercice 5

1. Montrer que 2 est une racine double de $P : x \longmapsto x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 60$.

2. En déduire la factorisation complète de P dans $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 6

On se propose de déterminer l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+1)P''(x) - 6P(x) = 0\}$.

1. Montrer que $A : x \longmapsto x^3 + x \in E$ et que $B : x \longmapsto x^4 - 1 \notin E$.

2. Montrer que si $P \in E$ alors son degré est nécessairement inférieur ou égal à 3.

3. En déduire que $E = \{x \longmapsto ax^3 + ax \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7

Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = -10x^3 - 23x^2 + 65x - 12$.

1. Vérifier que -4 est racine de P et en déduire une première factorisation de P.

2. Déduire des questions précédentes :

   a) La résolution de l'équation $P(x) = 0$.

   b) Une factorisation de $P(x)$ sous forme d'un produit de 3 fonctions affines.

   c) La résolution de l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

Exercice 8

Factoriser le polynôme $P : x \longmapsto 2x^3 - 2x^2 - 44x + 80$ sachant qu'une des trois racines réelles de P est le double d'une des deux autres.