P. Sup. B/L Octobre 2025

# Soutien n° 4 : Couples de V.A.R. discrètes

## Exercice 1 Vrai ou Faux?

- 1. Si X et Y sont deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli, alors il est possible que X + Y suive une loi de Bernoulli.
- 2. Si X et Y sont deux variables aléatoires possédant une variance et si  $X \leq Y$ , alors on a :  $V(X) \leq V(Y)$ .
- 3. Soient X et Y deux variables aléatoires. On a : X + Y = Max(X, Y) + Min(X, Y).
- 4. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ . Pour tout n de  $\mathbb{N}$ , on a l'inclusion :  $(\operatorname{Min}(X,Y) \leq n) \subset (\operatorname{Max}(X,Y) \leq n)$ .

## Exercice 2

Soit X une V.A.R. suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n,p)$ . On définit la variable Y par : Y=X si  $X\neq 0$  et Y prend une valeur au hasard dans  $[\![0,n]\!]$  si X=0.

Trouver la loi de Y et calculer  $\mathbb{E}(Y)$ .

#### Exercice 3

Le nombre X d'individus à l'écoute d'une radio suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Cette radio émet un avis de tempête et chaque individu à l'écoute entend l'alerte avec la probabilité  $p \in [0, 1]$ . On note Y la variable égale au nombre d'individus recevant l'avis de tempête.

- 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sachant (X = n) réalisé, quelle est la loi de Y?
- 2. En déduire la loi de Y à l'aide du système complet  $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Exercice 4

Soient X et Y deux V.A.R. discrètes à valeurs dans  $J = [\![1,n+1]\!]$  telles que :

$$\forall (i,j) \in J^2, \ \mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{\binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}}{4^n}.$$

- a) Montrer que l'on définit bien une loi de probabilité.
- b) Déterminer la loi de X, puis celle de X-1.
- c) Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et V(X).

# Exercice 5

Une urne contient 4 boules vertes et douze blanches. On fait des tirages successifs et, à chaque fois, on remet la boule tirée et on rajoute 3 boules de sa couleur. On note  $X_i$  la variable aléatoire réelle prenant pour valeur 0 si, au i-ième tirage on extrait une boule verte, 1 sinon.

- 1. Quelle est la loi de  $X_1$ ? Calculer son espérance.
- 2. Déterminer la loi conjointe du couple  $(X_1, X_2)$ .
- 3. En déduire la loi de probabilité de  $X_2$ .
- 4. Calculer la covariance de  $X_1$  et  $X_2$  puis leur coefficient de corrélation linéaire.

### Exercice 6

Lors d'une réception mondaine, trois salons A, B et C reçoivent les n invités  $(n \in \mathbb{N}^*)$ . Ces derniers se répartissent au hasard dans les trois salons. On désigne par X (resp. Y) la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de personnes entrant dans le salon A (resp. B).

- 1. Quelle est la loi de X et de Y? Donner leur espérance mathématique.
- 2. Donner la loi conjointe du couple (X, Y).
- 3. Calculer la covariance du couple (X,Y) et le coefficient de corrélation linéaire de ces deux variables.

### Exercice 7

Soient  $X_1, \ldots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que :  $X_1(\Omega) = \{1; 2\}$  avec  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{3}{4}$ .

- 1. Calculer  $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ .
- 2. Pour  $k \in \{1, ..., n-1\}$ . On définit la V.A.R.  $Y_k = X_k + X_{k+1}$ .
  - a) Déterminer  $Y_k(\Omega)$ , puis la loi de  $Y_k$ .
  - b) Les variables  $Y_1$  et  $Y_2$  sont-elles indépendantes? Calculer  $V\left(\sum_{k=1}^{n-1} Y_k\right)$ .