Soutien n° 4 : Couples de V.A.R. discrètes

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli, alors il est possible que $X+Y$ suive une loi de Bernoulli.
2. Si X et Y sont deux variables aléatoires possédant une variance et si $X \leqslant Y$, alors on a : $V(X) \leqslant V(Y)$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires. On a : $X+Y = \mathrm{Max}(X,Y) + \mathrm{Min}(X,Y)$.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a l'inclusion : $[\mathrm{Min}(X,Y) \leqslant n] \subset [\mathrm{Max}(X,Y) \leqslant n]$.

Exercice 2

On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 4. On note U le plus petit numéro obtenu et V le plus grand numéro.
Déterminer la loi du couple (U,V), puis les lois marginales de U et de V.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-1,0,1,2\}$. On pose $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Exercice 4

Soit $\alpha \in]0,1]$. On considère un couple de V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant i < j \end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de la variable X.
2. Déterminer la loi de la variable Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.
5. Déterminer la loi de X sachant $(Y=j)$ réalisé.

Exercice 5

On dispose d'un dé cubique équilibré et d'une pièce elle aussi équilibrée. Si le dé donne 6, on lance la pièce deux fois, sinon on la lance une seule fois. Soit X le résultat du dé et Y le nombre de piles obtenus au cours de cette expérience.

1. Rappeler la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi du couple (X,Y) sous forme d'un tableau et en déduire la seconde loi marginale.
3. Calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Pour chaque appel, elle a une probabilité p d'obtenir son correspondant, et $q = 1-p$ de ne pas le joindre. On note X le nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.

La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X+Y$.

2. Donner le support de Z puis calculer $\mathbb{P}(Z=0)$ et $\mathbb{P}(Z=1)$.
3. Déterminer la loi du couple (X,Y) et en déduire la loi de Z.
4. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k} = \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}$, puis en déduire que $\mathbb{P}(Z=\ell) = \binom{n}{\ell}p^\ell(1+q)^\ell(q^2)^{n-\ell}$.
5. En constatant que $p(1+q) = 1-q^2$, reconnaître la loi suivie par Z.

Exercice 7

Soient X,Y deux variables de Bernoulli de même paramètre $p \in]0,1[$ et indépendantes.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (S,D) où $S = X+Y$ et $D = X-Y$.
2. Déterminer les lois marginales de S et D. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$, puis $\mathrm{cov}(S,D)$.
3. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?