P. Sup. B/L Octobre 2025

# Soutien n° 3 : Variables aléatoires discrètes

## Exercice 1 Vrai ou Faux?

- 1. Si X admet une espérance, alors |X| admet aussi une espérance.
- 2. Si X a pour espérance m, alors X(X+1) a pour espérance m(m+1).
- 3. Si  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et si X possède une espérance, alors  $\frac{1}{X}$  possède aussi une espérance.
- 4. On désigne par c un réel et on suppose que la variable aléatoire X possède une variance. Les variables aléatoires X, c + X et c X ont la même variance.

#### Exercice 2

a) Soit X une V.A.R. discrète prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec les probabilités respectives 0,1; 0,2; 0,1; 0,3; 0,1; 0,2.

Calculer l'espérance et la variance de X.

b) Soit Y une V.A.R. discrète prenant les valeurs 3, 4, 5, 6. Déterminer la loi de Y sachant que :  $\mathbb{P}(Y < 5) = \frac{1}{3}$ ,  $\mathbb{P}(Y > 5) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 4)$ . Calculer  $\mathbb{E}(Y)$  et V(Y).

#### Exercice 3

Une urne contient 5 boules distinctes. On tire 3 boules une à une et avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules différentes tirées, déterminer la loi et l'espérance de X.

#### Exercice 4

Un garagiste dispose de 2 voitures. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 50 euros par jour et par voiture.

On considère X la V.A.R. égale au nombre de clients se présentant chaque jour :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 0, 1, \ \mathbb{P}(X = 1) = 0, 3, \ \mathbb{P}(X = 2) = 0, 4, \ \mathbb{P}(X = 3) = 0, 2.$$

- a) Déterminer la loi de la V.A.R. Y égale au nombre de clients satisfaits par jour.
- b) Calculer la marge brute moyenne par jour.

## Exercice 5

Soit X une V.A.R. telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\alpha}{2^{k-1}}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $\alpha$ , puis calculer l'espérance et la variance de X.

## Exercice 6

a) Vérifier, par récurrence, que : 
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et X une V.A.R. telle que  $X(\Omega) \subset [0, n]$ , montrer que :  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \ge k)$ .
- c) On effectue trois tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ( $n \ge 3$ ). Soit X le plus petit numéro obtenu.

Déterminer la loi et l'espérance de X.

### Exercice 7

Une urne contient n boules blanches et 1 boule noire. On effectue dans l'urne des tirages sans remise jusqu'à ce que la boule noire soit obtenue. Soit X le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

#### Exercice 8

Un téléski est constitué de  $N \ge 2$  perches différentes. Un skieur prend une de ces perches, va faire sa descente et revient au même téléski. On admet qu'entre-temps, le nombre de skieurs ayant emprunté le téléski suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0,1[$ .

Déterminer la probabilité que notre skieur reprenne la même perche et sa limite lorsque p tend vers 0? Est-ce surprenant?