# Soutien n° 3 : Variables aléatoires discrètes

**Exercice 1** *Vrai ou Faux ?*

1. Si $X$ admet une espérance, alors $|X|$ admet aussi une espérance.
2. Si $X$ a pour espérance $m$, alors $X(X+1)$ a pour espérance $m(m+1)$ .
3. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si $X$ possède une espérance, alors $\dfrac{1}{X}$ possède aussi une espérance.
4. On désigne par $c$ un réel et on suppose que la variable aléatoire $X$ possède une variance. Les variables aléatoires $X,\ c+X$ et $c-X$ ont la même variance.

**Exercice 2**

Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=k)$ | $3a$ | $2a$ | $3a$ | $a$ | $a$ |

1. Calculer $a$ de façon à ce que le tableau définisse bien une loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(X<2), \mathbb{P}(X \geqslant 1)$, puis $\mathbb{P}_{(X\leqslant 3)}(X \geqslant 1)$.

**Exercice 3**

Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases, se cache un Louis d'Or. On retourne 8 cases au hasard. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de Louis d'Or découverts.
Déterminer la loi de $X$ puis son espérance et sa variance.

**Exercice 4**

Les bouteilles de vin de la supérette du coin ont une chance sur 5 d'être bouchonnées et imbuvables (indépendamment les unes des autres). Si on achète un lot de $n$ bouteilles, à partir de quelle valeur de $n$ aura-t-on en moyenne au moins une bouteille bouchonnée ?

**Exercice 5**

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement avec remise 5 boules. Chaque fois qu'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il perd 3 points. Soit $X$ le nombre de boules blanches tirées et $Y$ le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de $X$, puis $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
2. Exprimer $Y$ en fonction de $X$.
3. En déduire la loi de $Y$ , puis $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$.
4. Que deviennent les résultats précédents si le jeu est sans remise ?

**Exercice 6**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X$ une V.A.R. telle que $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$, montrer que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$.
2. On effectue deux tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$ ($n \geqslant 1$). Soit $X$ le plus petit numéro obtenu.
   Déterminer la loi et l'espérance de $X$.

**Exercice 7**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

**Exercice 8**

Un téléski est constitué de $N \geqslant 2$ perches différentes. Un skieur prend une de ces perches, va faire sa descente et revient au même téléski. On admet qu'entre-temps, le nombre de skieurs ayant emprunté le téléski suit une loi géométrique de paramètre $p \in\, ]0,1[$.
Déterminer la probabilité que notre skieur reprenne la même perche et sa limite lorsque $p$ tend vers 0 ? Est-ce surprenant ?