

Soutien n° 2 : Probabilités conditionnelles - Indépendance

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}_A(B) = 1$.
2. Pour tout couple d'événements (A, B) , on a : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(A)$.
3. Si A est indépendant de B et C et si B et C sont incompatibles, alors A est indépendant de $B \cup C$.
4. Quels que soient les événements A et B , on a : $\mathbb{P}(A | B) \leq \mathbb{P}(A)$.
5. On lance trois fois une pièce équilibrée et on note E_1 : "les deux premiers lancers ont amené Pile puis Face", E_2 : "les deux derniers lancers ont amené Pile puis Face". Comme les résultats des lancers sont indépendants, les événements E_1 et E_2 sont indépendants.

Exercice 2

Blaise lance un dé honnête jusqu'à obtenir un 6. S'il obtient 6 au n -ième lancer, il remporte $n\text{€}$. Sachant que Blaise a gagné 10€ ou moins, quelle est la probabilité qu'il ait fait 6 au premier lancer ? qu'il ait gagné plus de 5€ ?

Exercice 3

Une guerre sévit depuis des années entre deux pays voisins. Les habitants du pays A sont à 60% favorables à la paix et à 16% favorables à la guerre (le reste étant sans opinion) ; par contre dans le pays B , 68% des habitants sont pour la guerre et 12% sont pour la paix. On rencontre un individu sans savoir quel pays il habite (une chance sur deux pour chaque).

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. Il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il habite le pays A ? Et s'il est favorable à la paix ?

Exercice 4 (*Ensaï 2022*)

On dispose d'un lot de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{2}$. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Déterminer la probabilité que le dé soit pipé sachant qu'on a obtenu une fois 6.
2. Calculer la probabilité p_n d'avoir un dé pipé sachant qu'on a obtenu n fois 6.
3. Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini. Comment l'interpréter ?

Exercice 5

On lance un dé à 6 faces. Si le dé amène le numéro k , on lance k fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un Pile ?

Exercice 6

On pose une question à un candidat choisi au hasard dans une population possédant une proportion p de tricheurs. On admet que si cet individu est un tricheur, il connaît à l'avance la question et sa réponse ; sinon il a une chance sur 12 de répondre correctement.

- a) Quelle est la probabilité que le candidat choisi donne la bonne réponse ?
- b) Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

Exercice 7

Une urne contient 3 pièces équilibrées dont une a deux "face". On prend une pièce au hasard et on effectue des lancers de cette pièce.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir pile au 1^{er} coup ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir n fois face de suite ?
3. Sachant que l'on a obtenu n fois face de suite, quelle est la probabilité que l'on ait pris la pièce truquée ? Quelle est sa limite lorsque n tend vers l'infini ?
4. Quelle est la probabilité d'être sûr de détecter une pièce honnête en au plus n coups ?