

Soutien n° 1 : Espaces Probabilisés

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Si A et B sont deux événements, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$.
2. Si deux événements A et B sont incompatibles, alors $\overline{A} \subset B$.
3. Si A et B sont deux événements, alors $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.
4. On lance indéfiniment une pièce et on note P_n l'événement "on obtient Pile au n -ième lancer". L'ensemble $\{P_1, \overline{P_1} \cap P_2, \overline{P_1} \cap \overline{P_2}\}$ est un système complet d'événements.

Exercice 2

Soit l'univers $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et les événements $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ et $C = \{3\}$. Exprimer à l'aide de A , B et C les événements suivants, puis les décrire :

1. l'un au moins des trois événements est réalisé.
2. Un, et un seul des trois, est réalisé.
3. Deux au moins, parmi les trois sont réalisés.
4. Un au plus est réalisé.

Exercice 3

Un dé cubique pipé est tel que la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{3}$, tandis que les cinq autres faces 1 à 5 ont la même probabilité d'apparaître.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. Le dé amène un 3.
2. Le dé amène un nombre impair.
3. Le dé amène un nombre pair.

Exercice 4

On tire simultanément 5 cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité :

1. p_1 de sortir l'as de pique et l'as de trèfle ?
2. p_2 de sortir exactement deux as ?
3. p_3 de sortir au moins deux as ?
4. p_4 de sortir exactement deux as et deux rois ?
5. p_5 de sortir une double paire ?
6. p_6 de sortir exactement trois cartes de même hauteur ?

Exercice 5

On lance 5 fois de suite une même pièce équilibrée.

1. Décrire l'univers des possibles Ω associé à cette expérience, puis proposer une loi de probabilité.
2. Quelle est alors la probabilité que l'on ait eu exactement deux "pile" ?

Exercice 6

On place au hasard cinq boules discernables dans quatre boîtes également discernables.

1. Combien y a-t-il de rangements possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même boîte ?
3. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?
4. Quelle est la probabilité qu'une boîte exactement soit vide ?
5. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

Exercice 7

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire trois fois de suite une boule avec remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre strictement croissant ?
- b. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre croissant ?

Exercice 8

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Montrer que, pour tous éléments A et B de \mathcal{A} :

1. $\max\{0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1\} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$
2. $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$ (on pourra vérifier d'abord que : $\forall x \in [0, 1], x - x^2 \leq \frac{1}{4}$).