P. Sup. B/L Septembre 2025

Soutien n° 1 : Espaces Probabilisés

Exercice 1 Vrai ou Faux?

- 1. Si A et B sont deux événements, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$.
- 2. Si deux événements A et B sont incompatibles, alors $\overline{A} \subset B$.
- 3. Si A et B sont deux événements, alors $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$.
- 4. On lance indéfiniment une pièce et on note P_n l'événement "on obtient Pile au n-ième lancer". L'ensemble $\{P_1, \overline{P_1} \cap P_2, \overline{P_1} \cap \overline{P_2}\}$ est un système complet d'événements.

Exercice 2

On lance deux fois un dé honnête i.e. non truqué et on note le couple des numéros obtenus sur la face supérieure du dé.

- a) Quel est l'univers des possibles Ω ?
- b) À quelles parties de Ω correspondent les événements A: "on obtient deux fois le même numéro" et B: "la somme des deux numéros est inférieure ou égale à 4"?
 - c) Calculer la probabilité des événements $A, B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ et $B \setminus A$.

Exercice 3

Le code d'une carte bancaire est formé de quatre chiffres variant de 0 à 9. On tape un code au hasard. Donner les probabilités des événements :

- a) A: "le code est formé de 4 chiffres distincts"
- b) B: "le code contient une paire et une seule"
- c) C: "le code est formé de deux paires"

Exercice 4

On considère un jeu de dominos.

- a) Combien y a-t-il de dominos dans le jeu?
- b) On tire au hasard 2 dominos. Quelle est la probabilité qu'ils soient compatibles c-à-d qu'ils aient un numéro commun?
 - c) On tire au hasard 5 dominos. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un "double"?

Exercice 5

On tire simultanément trois cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de: 1. n'obtenir que des cœurs? 2. n'obtenir que des as? 3. obtenir deux cœurs et un pique?

Exercice 6

On range au hasard quinze boules dans trois casiers.

- 1. Décrire un univers formé de 15-listes d'un ensemble à préciser qui permette de modéliser les rangements possibles. Quel est son cardinal?
- 2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans le même casier?
- 3. Quelle est la probabilité que chaque casier contienne 5 boules?

Exercice 7

Une urne contient 4 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges. On effectue dans cette urne trois tirages d'une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir : (i) trois boules de même couleur? (ii) trois boules de couleurs différentes?

Exercice 8

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Montrer que, pour tous éléments A et B de A:

- 1. $\max\{0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) 1\} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$ 2. $\mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$ (on pourra vérifier d'abord que : $\forall x \in [0, 1], \ x x^2 \leq \frac{1}{4}$).