Soutien n° 11 : Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Soient u, v, w des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Alors : $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle \Longrightarrow v = w$.
2. Soient u, v des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle$, alors $u = v$.
3. Soient E et F deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Si tout vecteur de E est orthogonal à tout vecteur de F, alors E est l'orthogonal de F.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, on ne peut pas trouver deux plans vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire canonique.
5. Si p est un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$, pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$, on a : $\langle a, p(a) \rangle = \|p(a)\|^2$ et $\|a - p(a)\|^2 = \|a\|^2 - \|p(a)\|^2$.

Exercice 2

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, montrer l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 4

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et on considère le sous-espace vectoriel $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = -z\}$.

On note $e_1 = \dfrac{1}{2}(1, 1, -1, -1),\ e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$ et $e_3 = \dfrac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$.

1. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.
2. Justifier que $u = (2, 3, -3, 7) \in E$ et déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = ae_1 + be_2 + ce_3$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère $E = \{(a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(b + c, -c, -b - c, c) \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E et F sont deux s.e.v. orthogonaux de $\mathbb{R}^4$. A-t-on $E^\perp = F$? Sinon, quelle relation peut-on écrire entre $E^\perp$ et F ?
2. Trouver des b.o.n. de E et de F.

Exercice 6

Soient E et F deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
Montrer que : $\mathbb{R}^n = E^\perp \oplus F^\perp$.

Exercice 7

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| = \|g(x)\|$.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle g(x), g(y) \rangle$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.
3. Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$.
   a) Montrer qu'il existe une famille $(e_1, \ldots, e_r)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que : $\forall i \in [\![1, r]\!],\ f_i = f(e_i)$.
   b) Montrer que la famille $(g(e_1), \ldots, g(e_r))$ est une base orthonormée de $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère le vecteur $a = (-2, 1, 1, 3)$.
Soit F le s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ défini par : $F = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ où $u_1 = (1, 2, 0, -2)$ et $u_2 = (2, 0, -2, 1)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de a sur F.
2. Déterminer une b.o.n. de F et retrouver le résultat du 1. par une autre méthode, puis calculer la distance de a à F.
3. En déduire le minimum de la fonction $f : (x, y) \longmapsto (2+x+2y)^2+(1-2x)^2+(1+2y)^2+(3+2x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.