# Soutien n° 11 : Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

**Exercice 1** *Vrai ou Faux ?*

1. Soient $u, v, w$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Alors : $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle \Longrightarrow v = w$.
2. Soient $u, v$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle$, alors $u = v$.
3. Soient $E$ et $F$ deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Si tout vecteur de $E$ est orthogonal à tout vecteur de $F$, alors $E$ est l'orthogonal de $F$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, on ne peut pas trouver deux plans vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

**Exercice 2**

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n+1}$.

**Exercice 3**

Soit $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1 - x, x - y, y - z, z)$ dans $\mathbb{R}^4$.
Calculer $\langle u, v \rangle$ puis, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, résoudre dans $\mathbb{R}^4$ l'équation :

$$(1 - x)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

**Exercice 4**

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $F$ le sous-espace vectoriel engendré par $u = (1, 0, 3)$ et $v = (0, 2, 5)$.

1. Construire une base orthonormée de $F$.
2. Vérifier que $F^\perp = \mathrm{Vect}\{(6, 5, -2)\}$ et en déduire une équation cartésienne de $F$.
3. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (autre que la base canonique). Quelles sont les coordonnées du vecteur $t = (1, 0, 2)$ dans cette base ?

**Exercice 5**

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et on considère $F$ le sous-espace vectoriel défini par les équations cartésiennes : $x + 2y + z + t = 0$ et $y + z = 0$.
Trouver une base orthonormée de $F$ et de $F^\perp$.

**Exercice 6**

Soit $A$ une matrice carrée symétrique, c'est-à-dire vérifiant ${}^tA = A$. Soient $X$ et $Y$ deux vecteurs propres de $A$ associés à des valeurs propres distinctes de $A$. Montrer que $X$ et $Y$ sont orthogonaux.

**Exercice 7**

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|v\| = 1$ et soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & x - 2\langle x, v \rangle v \end{array}$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que $f$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ i.e. vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| = \|x\|$.
3. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

**Exercice 8**

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Soit $F$ le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F$.
2. Déterminer la projection orthogonale $p$ sur $F$ en donnant sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la distance de $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, -1, 0)$ à $F$.