Soutien n° 10 : Variables à densité

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Une densité de probabilité est une fonction positive et croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \in]0,1[$.
3. Si X est une V.A.R. admettant une densité paire et une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = 0$.
4. Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $2X$ suit la loi $\mathcal{E}(2\lambda)$.
5. Si X suit la loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$, alors $1 - X$ suit la même loi que X.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. En déduire les probabilités suivantes :
$\mathbb{P}\Big(X \leqslant \dfrac{3}{4}\Big)$; $\mathbb{P}\Big(X \geqslant \dfrac{1}{2}\Big)$; $\mathbb{P}\Big(-\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant \dfrac{3}{4}\Big)$; $\mathbb{P}_{\left(X \geqslant -\frac{1}{2}\right)}\Big(X \leqslant \dfrac{3}{4}\Big)$.

Exercice 3

Déterminer si la fonction $F : x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$ est la fonction de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité.

Exercice 4

Alice et Bob vont au marché. Alice arrive à une heure aléatoire entre 8h et 12h et reste 30 minutes. Bob arrive à 10 heures et reste 30 minutes. Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent ensemble au même moment au marché ?

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ et soit $\lambda > 0$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

Exercice 7

Soit $a > 1$ et soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \ln(x)}{x^2} & \text{si } x \in [1,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe a tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ en fonction de a.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y. Construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
3. Calculer l'espérance de la variable Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(0,488 < Y \leqslant 1,2)$ en remarquant que $512 = 2^9$.

Exercice 9

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[a,b]$.
On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de Y_n.