

DS n° 5
(durée : 4 heures)

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on note F le sous-espace vectoriel $\text{Vect}\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F .
2. a) Déterminer un système d'équations cartésiennes de $F^\perp$, puis une base orthonormée de $F^\perp$.
b) En déduire une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, différente de la base canonique.
Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.
3. a) Soit p la projection orthogonale sur F et soit $x = (0, 0, 0, 1)$. Déterminer $p(x)$.
b) Déterminer la distance de x à F et à $F^\perp$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ inconnu et soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de la loi de X où $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose alors $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$, et on considère un réel $\alpha \in]0, 1[$.

1. Montrer que M_n suit la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.
2. Déterminer deux réels a_n et b_n tels que $\mathbb{P}(n\lambda M_n \leq a_n) = \frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}(n\lambda M_n \geq b_n)$.
3. En déduire que $\left[\frac{nM_n}{b_n}, \frac{nM_n}{a_n} \right]$ est un intervalle de confiance de $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{(1+t)\ln(2)}$ si $t \in [0, 1]$ et $f(t) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire de densité f .
2. a) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)}$.
b) En utilisant l'identité, valable pour tout z réel, $z^2 = z(1+z) - z$, calculer $V(X)$.
3. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
a) Déterminer, pour tout réel x réel, $F(x)$.
b) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$, d'inconnue x , admet une unique solution x_0 que l'on déterminera.
c) Tracer la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on donne $\ln(2) \approx 0,7$).
4. Soit $x \in [0, 2]$.
a) Établir l'équivalence suivante : $f(t)f(x-t) \neq 0 \iff \max(0, x-1) \leq t \leq \min(1, x)$.
b) On note φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{(1+t)(1+x-t)} & \text{si } \max(0, x-1) \leq t \leq \min(1, x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On admet l'existence d'un unique couple (A, B) de réels indépendants de t pour lesquels on a :

$$\forall t \in [\max(0, x-1), \min(1, x)], \quad \frac{1}{(1+t)(1+x-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1+x-t}.$$

Montrer que $A = B = \frac{1}{x+2}$.

5. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X , de même loi que X et de densité f .

On pose $Z = X + Y$ et on admet que Z est une variable à densité. On note h une densité de Z et on admet que h est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt$.

a) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$.

$$b) \text{ Montrer que : } h(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln(1+x)}{(\ln(2))^2(x+2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2(\ln(2) - \ln(x))}{(\ln(2))^2(x+2)} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 4

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On notera $\langle, \rangle$ le produit scalaire canonique de E et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

Partie I

Dans cette partie, on note g l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\text{la matrice : } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice A^2 , puis la matrice A^3 . Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que : $A^3 = -\alpha^2 A$.

2. Démontrer que 0 est valeur propre de g , et déterminer un vecteur v_1 de norme 1 tel que (v_1) soit une base du sous-espace propre E_0 de g associé à la valeur propre 0.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de g .

4. L'endomorphisme g est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?

5. On pose $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$. Démontrer que $v_2 \in E_0^\perp$, puis déterminer un vecteur v_3 tel que (v_2, v_3)

soit une base orthonormée de $E_0^\perp$.

6. Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormée de E , et déterminer la matrice représentative de g dans la base $\mathcal{C}$.

Partie II

1. Pour tout endomorphisme f de E , démontrer que les deux propriétés (P_1) et (P_2) ci-dessous sont équivalentes :

$$(P_1) : \forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$$

$$(P_2) : \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

Un endomorphisme vérifiant les propriétés (P_1) et (P_2) est dit antisymétrique.

2. Démontrer que l'endomorphisme g défini dans la partie précédente est antisymétrique.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un endomorphisme antisymétrique f de E .

L'objectif de cette partie est de démontrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la

matrice représentative de f est de la forme : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où α est un réel.

3. On veut démontrer par l'absurde que f n'est pas bijectif. On suppose donc que f est bijectif.

Soit x un vecteur non nul de E et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $f(x)$: $F = \text{Vect}\{x, f(x)\}$.

a) Déterminer la dimension de F .

b) Démontrer qu'il existe un vecteur y non nul de E tel que la famille $(x, f(x), y)$ soit orthogonale.

c) Démontrer alors que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.

d) Conclure.

4. Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E tels que e'_1 appartienne au noyau de f .

5. a) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est antisymétrique.

b) Conclure quant à l'objectif annoncé au début de cette partie.

Exercice 5

On considère, pour tout entier naturel n , la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+, f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}$.

1. Étude d'une suite d'intégrales impropres.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

1. a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale I_n .
- b) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $\forall t \geq 1, f_n(t) \leq \frac{1}{t^n}$.
- c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t) dt = 0$.
- d) Calculer $\int_0^1 e^{-t} dt$. En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 1 - e^{-1}$.
- e) Conclure en déterminant $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. Étude d'une fonction définie par une limite.

- a) Pour tout réel t positif, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$ en distinguant des cas.

Dès lors, on définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+, h(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$.

- b) Représenter la courbe de h dans un repère orthonormé du plan. On donne $e^{-1} \approx 0,37$.
- c) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t) dt$.
- d) A-t-on ici $\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$?

☐☐☐☐