**DS n° 5**
*(durée : 4 heures)*

## Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère l'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x - y + 8t = 0\}$.

1. Justifier que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner sa dimension sans calculs.

2. Déterminer $F^\perp$ et en donner une base orthonormée.

3. Déterminer la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale $p$ sur $F^\perp$.

4. En déduire la matrice de la projection orthogonale $q$ sur $F$ dans $\mathcal{B}$.

5. a) Calculer la distance du vecteur $e_3$ aux sous-espaces vectoriels $F$ et $F^\perp$.

   b) Soit $u \in \mathbb{R}^4$. Quelle égalité relie $\|u\|$ et les deux distances $d(u, F)$ et $d(u, F^\perp)$ ?

6. a) Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 4, 0, 0)$, $u_2 = (-2, 0, 0, 1)$ et $u_3 = (0, 0, 1, 0)$ forment une base de $F$.

   b) En déduire une base orthonormée de $F$.

## Exercice 2

*Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Si $Y$ est une variable aléatoire qui admet une espérance et une variance, on note respectivement $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ son espérance et sa variance.*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{|x|}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. a) Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Étudier la parité de $f$.

   c) Étudier la dérivabilité de $f$ en 0.

2. a) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $[0, +\infty[$ en précisant les limites aux bornes de $[0, +\infty[$ et la valeur des extrema.

   b) Esquisser la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

   c) Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   d) Montrer que $f$ peut être considérée comme une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

*Dans la suite, on note $X$ une variable aléatoire admettant $f$ comme densité et on admet que $X$ possède une espérance.*

3. a) Donner la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire $X$.

   b) On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$. Montrer que : $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

   c) Résoudre l'équation d'inconnue $x$ suivante : $F_X(x) = \dfrac{3}{4}$. Que représente la solution trouvée pour la variable aléatoire $X$ ?

4. On pose $T = |X|$ et on admet que $T$ est une variable aléatoire à densité.
   On note $F_T$ la fonction de répartition de $T$.

   a) Déterminer $F_T(x)$ pour tout $x$ réel.

   b) Donner une densité $f_T$ de la variable aléatoire $T$.

   c) Montrer que $T$ admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

   d) Reconnaître la loi de $T^2$. En déduire sans calcul l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(T^2)$.

   e) Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $V(X)$ et de $V(T)$.

**Exercice 3**

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel noté $\langle\,,\,\rangle$, et on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

On considère un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \langle\, f(x), y\,\rangle = -\langle\, x, f(y)\,\rangle.$$

1. Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle\, f(x), x\,\rangle = 0$.

2. On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle. Montrer, en utilisant l'égalité obtenue en 1., que 0 est la seule valeur propre réelle de $f$.

Dans la suite, on se propose de montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme : $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\alpha$ un réel.

3. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

4. Résoudre le problème posé si $\dim \operatorname{Ker}(f) = 3$.

5. On suppose, dans cette question, que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$.

   a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où $e_1$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$ et où $(e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(f)$.

   b) Montrer que la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) Vérifier que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par $f$, puis montrer que $b$ et $c$ sont nuls.

   d) En considérant le réel $\langle\, f(e_1), e_1\,\rangle$, donner la valeur de $a$. Que dire de l'hypothèse $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$ ?

6. On suppose, dans cette question, que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$.

   a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où $(e_1, e_2)$ est une base orthonormale de $\operatorname{Im}(f)$ et où $e_3$ appartient à $\operatorname{Ker}(f)$.

   b) Montrer que la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) Montrer que $a$ et $d$ sont nuls et que $c = -b$ puis conclure.

7. Conclure quant au problème initial.

**Exercice 4**

Pour tout réel $r \geqslant 1$, soit $f_r$ la fonction définie sur $[0,1[$ par : $f_r(x) = \dfrac{e^{-rx}}{\sqrt{1-x}}$ et $I(r) = \displaystyle\int_0^1 f_r(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f_r$. Représenter sommairement son graphe pour $r = 8$.

2. Montrer que $I(r)$ est une intégrale convergente pour tout réel $r \geqslant 1$.

   On écrit dans la suite $I(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r)$, avec : $I_1(r) = \displaystyle\int_0^{r^{-2/3}} e^{-rx}\,\mathrm{d}x$,

$I_2(r) = \displaystyle\int_0^{r^{-2/3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right) e^{-rx}\,\mathrm{d}x$ et $I_3(r) = \displaystyle\int_{r^{-2/3}}^1 \frac{e^{-rx}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

3. Montrer que, quand $r$ tend vers $+\infty$, on a : $I_1(r) = \dfrac{1}{r}(1 + o(1))$.

4. Montrer que, pour tout réel $y$ strictement compris entre 0 et 1, on peut écrire :

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leqslant 1 + \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}.$$

5. Montrer que, pour tout $r > 1$ : $0 \leqslant I_2(r) \leqslant c_2\left(1 - r^{-2/3}\right)^{-3/2} \times \dfrac{1}{r^{4/3}}$, où $c_2$ est une constante dont on précisera la valeur.

6. Montrer que, pour tout $r \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant I_3(r) \leqslant c_3\, e^{-r^{1/3}}$, où $c_3$ est une constante dont on précisera la valeur.

7. En déduire que $I(r)$ est équivalent à $\dfrac{1}{r}$ quand $r$ tend vers $+\infty$.

ΞΞΞΞΞ