

CONCOURS BLANC N° 2

Épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

L'énoncé comporte 3 pages

Aucun instrument de calcul n'est autorisé

Exercice 1

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

b) Calculer I_0 et I_1 .

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ est convergente.

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in [0, +\infty[, F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$.

3. Expliciter la valeur de $F(0)$.

4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leq y$. Montrer que $F(y) \leq F(x)$.

Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

5. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$. On distinguera les cas $x = 0$ et $x > 0$.

b) Montrer que, pour tout réel x positif : $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$.

c) Montrer que pour tout réel x strictement positif : $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$.

d) À l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$ est convergente.

a) Montrer que : $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$.

b) En déduire que : $0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2$.

7 a) En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 : $F(x) = 1 - x + o(x)$ (V_0).

b) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$. En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F . On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 2

Dans cet exercice, X est une variable aléatoire réelle dont la densité f est donnée par : $f(x) = 1$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Partie I

1. Calculer $\mathbb{P}(X \leq -1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 0)$.

2. Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X .

3. Les variables X et $-X$ sont-elles de même loi ?

4. Est-ce que X et $|X|$ admettent une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(|X|)$.

5. Est-ce que $\frac{1}{|X|}$ admet une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{|X|}\right)$.

6. Montrer que X^2 admet une espérance et calculer la variance de X .

7. Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, $e^{\lambda X}$ admet une espérance, et calculer sa valeur.

Partie II

On considère aussi maintenant des variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ toutes de même loi que X . Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose que les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes. On définit ensuite les variables aléatoires m_n, M_n et S_n comme suit :

$$m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}, \quad M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

8. Est-ce que S_n admet une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(S_n)$.
9. Donner une formule explicite pour la fonction de répartition de M_n .
10. Donner une formule explicite pour la fonction de répartition de m_n .
11. Les variables aléatoires m_n et M_n sont-elles indépendantes ?
12. Calculer $\mathbb{P}(S_n \geq 0)$ (*on admettra que S_n est une variable à densité*).
13. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = \left(\frac{f(\lambda/2)}{\lambda/2} \right)^n$.

14. Montrer que, pour tout réel $u > 0$, on a : $\frac{f(u)}{u} \leq e^{\frac{u^2}{6}}$.
15. Montrer que, pour tous réels $t, \lambda > 0$, on a : $\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\lambda t + \frac{n\lambda^2}{24}}$.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Markov.
16. En déduire que, pour tout réel $t > 0$, on a : $\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{\frac{-6t^2}{n}}$.
17. Soit Z une variable aléatoire gaussienne (de loi normale) centrée réduite et soit Z_n la variable centrée réduite associée à S_n . On admet que : $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) = \mathbb{P}(Z \geq t)$.

En déduire que : $\forall t > 0, \mathbb{P}(Z \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$.

18. Montrer que $\mathbb{E}(|S_n|) \leq \mathbb{E}(S_n^2)^{\frac{1}{2}}$.
19. En déduire que $\mathbb{E}(|S_n|) \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{n}$.
20. Conjecturer une valeur pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(|S_n|)}{\sqrt{n}}$ en justifiant.

Partie III

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que N admet une espérance, et on suppose aussi que, pour tout entier $n \geq 1$, les variables aléatoires $N, X_1, \dots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes. On pose : $S = \sum_{i=1}^N X_i$ et $V = \max\{X_1, \dots, X_N\}$, et on admet

que S et V sont deux variables aléatoires. Précisons que, si $N(\omega) = 6$, $S(\omega) = \sum_{i=1}^6 X_i(\omega)$.

21. On suppose uniquement dans cette question que $\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(N = 2) = \frac{1}{2}$.

Calculer $\mathbb{P}\left((N = 1) \cap \left(S \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)\right)$ et $\mathbb{P}\left((N = 2) \cap \left(V \geq \frac{1}{3}\right)\right)$.

22. On suppose que $N - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Calculer la fonction de répartition de V .

Exercice 3

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie I

1. Questions de cours. Soit A une matrice élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre de A .
 - b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de A pour que A soit inversible.

- c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Dans cette question seulement, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
- b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
- c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Partie II.

On désigne par $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré au plus $n - 1$. On considère l'application F_n définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[x], \quad F_n(P) = Q \quad \text{avec} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x) + \frac{1-x}{n} P'(x)$$

où P' est la dérivée de P

3. Montrer que F_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
4. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit P_k et Q_k en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k(x) = x^{n-k}$ et $Q_k = F_n(P_k)$.
- a) Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
- b) Expliciter Q_n .
- c) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_k(x) = \frac{k}{n} P_k(x) + \frac{n-k}{n} P_{k+1}(x)$.
- d) Soit M_n la matrice représentative de F_n dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que la matrice M_n est triangulaire et donner ses coefficients diagonaux.
5. Dans cette question seulement, on se place dans le cas $n = 2$.
- a) Déterminer les valeurs propres de F_2 et une base de chaque sous-espace propre.
- b) Soit T la fonction polynomiale définie par $T : x \mapsto 2x + 1$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale $S \in \mathbb{R}_1[x]$ telle que $F_2(S) = T$. Déterminer S .
6. On revient au cas général avec n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.
- a) La matrice M_n est-elle inversible ? Justifier.
- b) Déterminer les valeurs propres de M_n . La matrice M_n est-elle diagonalisable ? Justifier.
- c) Déterminer le sous-espace propre de F_n associé à la valeur propre 1.
7. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
- a) Justifier l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \setminus \{0\}$ tel que $F_n(P) = \frac{n-k}{n} P$.

Dans la suite de cette question, on considère un tel polynôme P .

- b) Calculer $P(1)$. En déduire qu'il existe $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $R \in \mathbb{R}_{n-2}[x]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)^r R(x)$ et $R(1) \neq 0$.
- c) Montrer que $r = k$.
- d) Montrer que R est un polynôme constant.
- e) Déterminer une base de vecteurs propres de F_n .
8. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on définit V_k en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad V_k(x) = (x-1)^k$.
- a) Montrer que $(V_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ forme une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
- b) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, exprimer $F_n^i(V_k)$ en fonction de V_k où la suite $(F_n^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est définie par récurrence comme suit : $F_n^1 = F_n$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*, \quad F_n^{i+1} = F_n^i \circ F_n$.
9. On considère la suite de polynômes $(U_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U_1(x) = x^{n-1} \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad U_{j+1} = F_n(U_j).$$

- a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad U_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} V_k(x)$.
- b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'écriture de U_j sur la base $(V_0, V_1, \dots, V_{n-1})$.
- c) Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad U_j(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{j-1} (-1)^k$.

ΞΞΞΞΞ