CONCOURS BLANC N$^\circ$ 2

Épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

L'énoncé comporte 3 pages

Aucun instrument de calcul n'est autorisé

Exercice 1

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par : $\forall t<1,\ f(t)=\begin{cases} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty,1[$.

2. a) Montrer que : $\forall t\in\,]-\infty,1[,\ \dfrac{t}{1-t}+\ln(1-t)\geqslant 0$.

   b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$, et calculer $f'(t)$ pour $t\neq 0$.

   c) En déduire la monotonie de f sur $]-\infty,1[$.

3. a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $t\longmapsto \ln(1-t)$.

   b) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

   c) Montrer enfin que f est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$.

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

Partie B :

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty,1[$ par : $\forall x<1,\ L(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge et on admet que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier que L est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$ et préciser $L'(x)$.

7. **Étude de L en 1 :**

   a) Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple que :

$$\forall (A,B)\in\,]0;1[^2,\ \int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{1-B}^{1-A}\frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

   b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\,]0;1[,\ -\dfrac{\ln(t)}{1-t}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}-t^k\ln(t)+\frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$.

   c) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^1 -t^k\ln(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(k+1)^2}.$$

   d) Montrer que la fonction $t\longmapsto\dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0;1[$. (*on pourra commencer par calculer les limites en 0 et en 1*)

   En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge puis montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t=0.$$

   e) À l'aide de la question 7. b), montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge puis que l'on a : $\displaystyle\int_0^1\frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

   f) En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1)=\dfrac{\pi^2}{6}$.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. a) Justifier que la fonction $x \longmapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est dérivable sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.

b) En déduire que : $\forall x \in [-1;1],\ L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.

c) Préciser alors la valeur de $L(-1)$.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Pour tout réel strictement positif θ et tout réel strictement positif s, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{s}\exp\Big(-\big(\frac{t-\theta}{s}\big)\Big) & \text{si } t \geqslant \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité.

Dans tout l'exercice, on note X une variable aléatoire à valeurs positives admettant f comme densité.

On dit que X **suit la loi exponentielle translatée de paramètres** (θ, s).

2. a) Soit F_X la fonction de répartition de X. Calculer, pour tout x réel, $F_X(x)$.

b) Soit $q \in]0;1[$. Calculer en fonction de θ et de s, le *quantile* d'ordre q de X i.e. une valeur de x telle que $\mathbb{P}(X \leqslant x) = q$.

3. On pose $Y = X - \theta$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y et reconnaître la loi de Y.

b) En déduire l'espérance et la variance de X en fonction de θ et de s.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère, pour tout entier naturel n non nul, n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi que X.

On pose $M_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $T_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$, si bien que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ M_n(\omega) = \max\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\big) \text{ et } T_n(\omega) = \min\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\big).$$

On admet que M_n et T_n sont des variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

On note respectivement F_{M_n} et F_{T_n} les fonctions de répartition de M_n et de T_n.

4. a) Calculer $F_{M_n}(x)$ et $F_{T_n}(x)$ pour tout x réel.

Montrer que T_n suit une loi exponentielle translatée dont on précisera les paramètres.

b) Déduire de la question précédente et de la question 3. b) l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ et la variance $V(T_n)$ de T_n sans calculs.

5. Dans cette question, on considère le cas particulier où $n = 2$.

On admet sans démonstration que $\mathbb{E}(M_2) = \theta + \frac{3}{2}s$ et $V(M_2) = \frac{5}{4}s^2$.

a) Montrer que $M_2T_2 \leqslant \frac{1}{2}\big(M_2^2 + T_2^2\big)$ et en déduire l'existence de la covariance $\mathrm{cov}(M_2, T_2)$ des variables aléatoires M_2 et T_2.

b) À l'aide des définitions de la variance et de la covariance, redémontrer la formule suivante : $V(M_2 + T_2) = V(M_2) + V(T_2) + 2\,\mathrm{cov}(M_2, T_2)$.

c) Justifier l'égalité suivante : $M_2 + T_2 = X_1 + X_2$.

En déduire la valeur de $\mathrm{cov}(M_2, T_2)$.

d) On note $\mathrm{cor}(M_2, T_2)$ le coefficient de corrélation de M_2 et T_2. Calculer $\mathrm{cor}(M_2, T_2)$.

6. On suppose dans cette question que le paramètre s est connu et que $s < 1$. Soit α un réel de $]0;1[$.

On pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Z_k = X_k - s$ et $\overline{Z_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

$\hookrightarrow$

a) Calculer l'espérance et la variance de $\overline{Z_n}$.

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\theta \in \left[\overline{Z_n} - \frac{1}{\sqrt{n\alpha}}, \overline{Z_n} + \frac{1}{\sqrt{n\alpha}}\right]\right) \geqslant 1 - \alpha.$$

Exercice 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On dit qu'un endomorphisme h est nilpotent quand il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul.

L'objectif de cet exercice est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. a) Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.

b) On suppose que f est diagonalisable. En étudiant la trace de A, aboutir à une contradiction. Que peut-on en déduire sur f ?

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right)$ et que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right)$ où $(f + \mathrm{Id})^2 = (f + \mathrm{Id}) \circ (f + \mathrm{Id})$.

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right)$.

Pour simplifier les notations, on note dans la suite $F = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}\left((f + \mathrm{Id})^2\right)$.

4. Montrer que F et G sont stables par f.

5. On note $P(f) = (f + \mathrm{Id})^2 \circ (f - 2\,\mathrm{Id})$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

On note dorénavant $p_1 = \frac{1}{9}(f + \mathrm{Id})^2$ et $p_2 = -\frac{1}{9}(f + 4\,\mathrm{Id}) \circ (f - 2\,\mathrm{Id})$.

6. Justifier que les endomorphismes p_1 et p_2 commutent i.e. vérifient $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

7. a) Que vaut l'endomorphisme $p_2 \circ p_1$?

b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(p_2)$ et $\mathrm{Im}(p_1)$.

8. a) Montrer que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$.

b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(p_2)$ et $\mathrm{Im}(p_1)$.

9. Justifier que $\mathrm{Ker}(p_2) = \mathrm{Im}(p_1)$ et que $\mathrm{Ker}(p_1) = \mathrm{Im}(p_2)$.

10. Déduire des questions 7. a) et 8. a) que p_1 et p_2 sont des projecteurs.

11. Montrer que p_2 est la projection sur G parallèlement à F, puis identifier p_1.

On pose maintenant : $g = 2p_1 - p_2$ et $h = f - g$.

12. Justifier que g et h peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de certaines puissances de f.

13. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans cette base soit :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Montrer que $h = (f - 2\,\mathrm{Id}) \circ p_1 + (f + \mathrm{Id}) \circ p_2$.

15. En déduire que $h^2 = 0$, puis conclure.