

DS n° 3
(durée : 4 heures)

Exercice 1

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de pile soit égale à $p \in]0; 1[$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On effectue N lancers indépendants du dé. Si n est le nombre de 6 obtenus lors des N lancers, on lance ensuite n fois la pièce de manière indépendante.

1. Soit Z la variable aléatoire qui représente le nombre de 6 obtenus durant les lancers du dé. Préciser $Z(\Omega)$ et la loi de Z .
2. Déterminer l'espérance et la variance de Z .
3. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus au cours des lancers de la pièce. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer la probabilité conditionnelle de $(X = k)$ sachant l'événement $(Z = n)$ réalisé.
4. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}((X = k) \cap (Z = n))$.
5. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.
6. Montrer, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq k \leq n \leq N$, que : $\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$.
7. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k)$.
8. Reconnaître la loi de X et en déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2 Les questions A) et B) sont indépendantes

A) Soit P le polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^4 + (b-a)x^3 + (2a-3b)x^2 + (a-2b)x + 1$ où a et b sont deux réels.

1. Déterminer a et b pour que 1 soit racine multiple du polynôme P .
Désormais, a et b auront ces valeurs.
2. Quel est alors l'ordre de multiplicité m de 1 comme racine de P ?
3. Mettre $(x-1)^2$ en facteur dans P puis donner la factorisation complète de P dans $\mathbb{R}[x]$.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)P'(x) = nP(x)$ l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[x]$.

1. Quels sont les polynômes constants solutions de (E) ?

On suppose que l'équation (E) admet une solution non nulle que l'on note P et on note d son degré.

2. Déterminer le degré de P en raisonnant sur les termes dominants des deux membres de l'équation.
3. a) Démontrer que 1 est une racine de P .
b) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)P^{(k+1)}(x) = (n-k)P^{(k)}(x)$.
c) Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de P .
4. En déduire une expression de P en justifiant.
5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice 3

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f \circ f$ soit un projecteur et que $\text{rg}(f^2) = 1$. [Attention : le projecteur est f^2 , mais pas f a priori]
 - a) Justifier que $f^4 = f^2$ et en déduire que les seules valeurs propres possibles de f sont les trois réels 0, 1 et -1.

- b) En raisonnant par l'absurde, montrer que 0 est valeur propre de f .
- c) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{0\}$ ou $\{0; 1\}$ ou $\{0; -1\}$.
- d) On suppose, de plus, que f admet 1 pour valeur propre et que f n'est pas un projecteur.

Justifier que $\text{Sp}(f) = \{0; 1\}$ et que f n'est pas diagonalisable. Donner alors les dimensions de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ en justifiant.

- e) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f est représenté par A .
- f) Justifier que $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Im}(f^2)$. A-t-on aussi $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$? Justifier.

Exercice 4

Soit $n \geq 1$ un entier et $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres réels.

Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$.

La matrice $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice compagnon de P , est définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Exemples : a) Donner la matrice compagnon C_Q du polynôme $Q : x \mapsto (x - 2)^2(x + 1)$.
 b) Déterminer le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
 c) Quelles sont les racines de R ? Quelles sont les valeurs propres de C_R ? Que constatez-vous ?
 d) La matrice C_R est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.
2. a) Dans le cas général, déterminer le rang de C_P et la dimension de son noyau.
Indication : on pourra distinguer les cas $a_0 = 0$ et $a_0 \neq 0$.
 b) Justifier que 0 est valeur propre de C_P si, et seulement si, $P(0) = 0$.
 c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\dim \text{Ker}(C_P - \lambda I_n) \leq 1$.

3. L'application qui, à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n$ est-elle une application linéaire ?

Dans la suite, on considère $M_P = a_0 I_n + a_1 C_P + \dots + a_{n-1} C_P^{n-1} + C_P^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $E_1, E_2, \dots, E_n$ les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ écrits en colonne.

4. L'objectif de cette question est de montrer que M_P est la matrice nulle.
 a) (Exemple) Vérifier que M_R est la matrice nulle, où R est le polynôme défini en 1. b).
 b) Montrer que, pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $E_k = C_P^{k-1} E_1$.
 c) En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $(X, C_P X, \dots, C_P^{n-1} X)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
 d) Montrer que $M_P E_1 = 0$.
 e) Montrer que M_P est la matrice nulle.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et X un vecteur propre associé.
 a) Montrer que $M_P X = P(\lambda) X$.
 b) En déduire que λ est racine de P .

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

a) On suppose uniquement dans cette question 6. a) qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

tel que $C_P X = \lambda X$.

Montrer que : $x_{n-k} = (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k) x_n$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

b) Montrer que λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

7. Soit $k \geq 1$ un entier. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des nombres réels tous distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers positifs non nuls. On définit alors le polynôme S par : $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice compagnon C_S de S soit diagonalisable.

b) Lorsque $n \geq 2$, donner un exemple de matrice de taille $n \times n$ non diagonalisable.

$$\Xi \Xi \Xi \Xi \Xi$$