DS n° 3
(durée : 4 heures)

Exercice 1

1. Un résultat préliminaire : Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$.

b) En déduire que P est constant.

On s'intéresse désormais aux polynômes réels P vérifiant l'équation :

$$(\star)\ \forall x \in \mathbb{R},\ xP(x-1) = (x-2)P(x).$$

2. Déterminer les polynômes réels de degré inférieur ou égal à 1 solutions de $(\star)$.

3. Soit P un polynôme non nul solution de $(\star)$.

a) Montrer que 0 et 1 sont racines de P.

b) Soit a une racine de P, montrer que si $a \neq 0$, $a-1$ est racine de P et si $a \neq 1$, $a+1$ est racine de P.

c) Déduire de ce qui précède que les seules racines réelles de P sont 0 et 1.

d) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ les ordres de multiplicité respectifs de 0 et 1 comme racines de P. On peut donc écrire P sous la forme $P(x) = x^p(x-1)^qQ(x)$ où $Q \in \mathbb{R}[x]$. Que peut-on dire des racines de Q ?

4. Déterminer l'ensemble des polynômes réels vérifiant $(\star)$.

Exercice 2

1. Un résultat préliminaire : soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geqslant 2$).
On note H_1 et H_2, deux hyperplans distincts de E, c'est-à-dire deux sous-espaces vectoriels de E vérifiant $\dim(H_1) = \dim(H_2) = n-1$ et $H_1 \neq H_2$.

a) Prouver que : $H_1 + H_2 = E$.

b) En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.

2. Pour tout polynôme P de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[x]$, on définit le polynôme $f(P)$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = \dfrac{x^2-1}{2}P''(x) - xP'(x) + P(x)$ où P' et P'' désignent les dérivées successives de P.
Montrer que f est un endomorphisme de E.

3. On note $\mathcal{C} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E où $\forall k \in [\![0,3]\!],\ e_k : x \longmapsto x^k$.
Calculer $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

4. Montrer que f est un projecteur de E.

5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un plan vectoriel dont on donnera une base.

6. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset G$ où $G = \{Q \in E \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$.

7. On considère l'application linéaire φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P'(1)$.

a) Montrer que φ est surjective.

b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

8. a) Justifier que G est un sous-espace vectoriel de E.

b) En s'aidant du résultat préliminaire, donner la dimension de G.

9. Prouver l'égalité $\mathrm{Im}(f) = G$.

10. Préciser une base de $\mathrm{Im}(f)$.

11. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 3

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ est aussi diagonalisable.

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette proposition est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Calculer A^2 puis vérifier que A^4 est diagonale.

b) Soit λ une valeur propre réelle de A et un vecteur $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$; montrer que $A^4X = \lambda^4 X$ et en déduire que $\lambda = 1$ ou -1.

c) Déterminer une base (u) de $\mathrm{Ker}(g - Id)$.

d) g est-il diagonalisable ?

3) a) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\mathrm{Ker}(g^2 + Id)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Écrire la matrice de g^2 dans $\mathcal{B}$ et conclure quant au problème initial.

Problème

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ sa base canonique.
On pose $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_4, e_5, e_6)$, et on désigne respectivement par E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de E engendrés par $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Enfin on appelle A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit u l'endomorphisme de E_1 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est A. Déterminer les valeurs propres de u ainsi qu'une base de E_1 formée de vecteurs propres de u.

2. Soit f l'unique application linéaire de E_1 vers E_2 définie par : $f(e_1) = e_4$, $f(e_2) = e_5$ et $f(e_3) = e_6$.

Montrer que f est un isomorphisme et déterminer la matrice de sa réciproque f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.

3. a) Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

b) En déduire que, si (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont deux éléments de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, alors on a : $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

4. Pour tout vecteur x de E dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$, on pose :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\ x_2 = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 \end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2).$$

a) Prouver que l'application F qui, à tout vecteur x de E, associe le vecteur $F(x)$ est un endomorphisme de E.

b) Déterminer le noyau de F et en déduire que F est un automorphisme de E.

c) Montrer que la matrice M de F dans la base $\mathcal{B}$ peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\hookrightarrow$

5. On suppose, dans cette question, que μ est une valeur propre de F et que x est un vecteur propre associé à μ ; on définit les vecteurs x_1 de E_1 et x_2 de E_2 comme dans la question précédente.

a) Justifier que la valeur propre μ n'est pas nulle.

b) Utiliser les résultats de la question 3. pour prouver que les vecteurs x_1 et x_2 sont tous les deux non nuls et que x_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\mu - \dfrac{1}{\mu}$.

6. Étudier la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{x}$ (sens de variation et limites).

7. On suppose, dans cette question, que λ est une valeur propre de u et que x_1 est un vecteur propre de u associé à λ.

a) Montrer que l'équation d'inconnue μ : $\lambda = \mu - \dfrac{1}{\mu}$ admet deux solutions distinctes μ_1 et μ_2.

b) Montrer que μ_1 et μ_2 sont des valeurs propres de F. Donner, en fonction de x_1, un vecteur propre de F associé à μ_1 et un vecteur propre de F associé à μ_2.

8. La matrice M est-elle diagonalisable ?

$\Xi_\Xi\Xi_\Xi\Xi$