

CONCOURS BLANC N° 1

—————
Épreuve de mathématiques

—————
Durée : 4 heures

—————
L'énoncé comporte 3 pages

Aucun instrument de calcul n'est autorisé

Exercice 1

Dans ce problème, on considère différents dés ayant diverses caractéristiques. Afin de les distinguer, on les nomme à l'aide de différentes couleurs. On rappelle qu'un dé est dit « bien équilibré » si, lors d'un lancer, chaque face apparaît avec la même probabilité.

Dé rouge : Le *dé rouge* est **bien équilibré** et a 6 faces, numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 5. Autrement dit, la face usuellement numérotée 6 a été remplacée par un second 5.

On lance ce dé rouge et on note R_0 le résultat obtenu.

1. a) Donner la loi de R_0 .
b) Calculer son espérance $\mathbb{E}(R_0)$.
2. On considère la variable aléatoire X , qui vaut 1 si $R_0 = 5$ et 0 sinon.
 - a) Donner la loi de X .
 - b) Calculer son espérance et sa variance.

On fait dorénavant une succession de lancers du dé rouge, et on numérote les résultats R_1, R_2, R_3, R_4 , etc. On suppose toutes les variables aléatoires $R_0, R_1, R_2, \dots$ indépendantes.

3. On considère la variable aléatoire $Y = \min\{i \geq 1 \mid R_i = 5\}$.

- a) Donner la loi de Y .
- b) Donner, sans calcul, son espérance $\mathbb{E}(Y)$.
- c) Donner, sans calcul, sa variance $V(Y)$.

On considère, pour $i \geq 1$, l'événement S_i «les résultats obtenus aux lancers $i - 1$ et i sont les mêmes», c'est-à-dire, $S_i = (R_{i-1} = R_i)$.

4. a) Pour un $i \geq 1$ fixé, calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_i)$.
b) Les événements $S_1, S_2, S_3, \dots$ sont-ils indépendants ?
c) Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $(R_1 = 5)$ sachant S_2 .
5. On considère la variable aléatoire $Z = \min\{i \geq 1 \mid R_i = R_{i-1}\}$.
 - a) Exprimer Z en fonction de la suite d'événements $S_1, S_2, S_3, \dots$. Une description textuelle sera acceptée.
 - b) La variable aléatoire Z suit-elle une loi géométrique ? Une justification précise est attendue.

Dé blanc : Le *dé blanc* est classique, **bien équilibré** et a 6 faces, numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On lance ce dé blanc et on note B le résultat obtenu, que l'on suppose indépendant de R_0 .

6. Calculer la probabilité que B soit égal à R_0 .

Dé vert : Le *dé vert* est **bien équilibré** et a 6 faces, numérotées 1, 1, 3, 5, 5 et 5.

On lance ce dé vert et on note V le résultat obtenu, que l'on suppose indépendant de R_0 .

7. Calculer la probabilité que V soit égal à R_0 .

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X .

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{R}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -1) = q.$$

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{R}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la variable T_n par : $T_n = \prod_{k=0}^n X_k = X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_n$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}(X_k)$ et $V(X_k)$.
2. a) Préciser $T_n(\Omega)$. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et en déduire la loi de T_n .
b) Pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, avec $n > m$, calculer la covariance $\text{cov}(T_n, T_m)$ de T_n et T_m .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $p_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$.
Établir la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$ et retrouver ainsi la loi de T_n .
4. On suppose dans *cette question uniquement* que $p = \frac{1}{2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit W_n , Z_n et Y_n les variables aléatoires définies par :

$$W_n = X_n X_{n-1}, \quad Z_n = \sum_{k=1}^n W_k \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{1}{2}W_n + \frac{1}{2}.$$

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
- b) Montrer que deux variables aléatoires qui suivent toutes les deux une loi de Bernoulli sont indépendantes si, et seulement si, leur covariance est nulle.
- c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes.
- d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Z_n en fonction de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ et en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}(Z_n = 2k - n)$ en fonction de k et n .
5. Soit H une variable aléatoire indépendante des X_k et suivant la loi géométrique de paramètre p . On pose $D_0 = HX_0$.
a) Déterminer la loi de D_0 .
b) Justifier que D_0 admet une espérance et une variance, et les déterminer.
6. Soit K une variable aléatoire indépendante des X_k et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$: $T(\omega) = \prod_{k=0}^{K(\omega)} X_k(\omega)$. On admet que T est une variable aléatoire.
- a) Montrer que la série de terme général $\mathbb{E}(T_n) \times \mathbb{P}(K = n)$ converge et que :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(T_n) \times \mathbb{P}(K = n).$$

- b) Calculer $\mathbb{E}(T)$ et déterminer la loi de T .

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Préliminaires

1. Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} p_k s^k$ converge pour tout $0 \leq s \leq 1$.

Dans la suite, on pose : $f(s) = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k s^k$ pour tout $s \in [0, 1]$.

2. Déterminer les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$.

↪

Soit u_0 un nombre réel tel que $0 \leq u_0 \leq 1$.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

Les trois parties qui suivent sont indépendantes entre elles

Partie I Dans cette partie, on étudie le cas particulier où $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$.

3. a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2}$.

b) Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - 1$ est une suite géométrique.

c) En déduire une expression de u_n .

4. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on déterminera.

Partie II Dans cette partie, on fixe $r \in]0, 1[$ et on étudie le cas particulier où $p_k = (1 - r)r^k$ pour tout entier $k \geq 0$.

5. Calculer $f(s)$ pour $s \in [0, 1]$.

6. a) Trouver un polynôme P tel que $1 - 4x + 4x^2 = P(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Trouver tous les nombres réels $s \in [0, 1]$ tels que $f(s) = s$.

7. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on déterminera.

Partie III Dans cette partie, on étudie quelques propriétés générales de f .

8. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0, 1]$.

9. Montrer que la fonction f est continue sur $[0, 1]$.

Indication : on pourra commencer par montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $K_\varepsilon \geq 1$ tel que : $\forall s \in [0, 1], \sum_{k \geq K_\varepsilon} p_k s^k \leq \varepsilon$.

□□□□