CONCOURS BLANC N° 1

épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

L'énoncé comporte 3 pages

Aucun instrument de calcul n'est autorisé

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés $1, 2, \ldots, n$, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux de jeu.
Pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement : "le joueur réussit le niveau k".

1. a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   b) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
   c) Écrire l'événement $(X_n = n)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$.
   d) Écrire, pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'événement $(X_n = k)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = k)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

2. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$.

3. a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et p.
   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on a : $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k q$.
   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note p_k cette limite.
   c) Vérifier que les nombres $p_k, k \in \mathbb{N}$, définissent une loi de probabilité d'une variable aléatoire qu'on notera X.
   d) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance et la variance de X.
   e) Quelle relation constate-t-on entre $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X_n)$?

Exercice 2

Ce problème comporte deux parties.

Partie I. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel et soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $X = \min(X_1, X_2)$, minimum entre X_1 et X_2.

1. a) Que vaut $\mathbb{P}(X_1 = 1)$, la probabilité de l'événement $\{X_1 = 1\}$?
   b) Calculer $\mathbb{P}(X = n)$.
   c) Montrer que les événements $\{X = n\}$ et $\{X_1 = 1\}$ sont incompatibles.
   d) En déduire que X et X_1 ne sont pas indépendantes.

2. a) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que : $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \dfrac{(n-k+1)^2}{n^2}$.
   b) Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Que vaut $\mathbb{P}(X = k)$?

3. a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
   b) En déduire la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ puis calculer la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(X_1)}{n}$.

c) On admet que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

d) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(X)}{n}$.

Partie II. Soit $m \geqslant 1$ un entier naturel. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1,\ldots,m\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire Z de loi uniforme sur $\{1,\ldots,Y\}$. L'ensemble sur lequel Z est définie est donc aléatoire : par exemple, si la réalisation de Y donne 3, alors Z est uniforme sur $\{1;2;3\}$, tandis que si la réalisation de Y donne 5, alors Z est uniforme sur $\{1;2;3;4;5\}$, et ainsi de suite.

4. **Dans cette question seulement**, on suppose qu'il existe un $k \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $\mathbb{P}(Y=k)=1$. Quelle est la loi de Z ? Donner, sans justification, son espérance $\mathbb{E}(Z)$.

On suppose dans toute la suite que, pour tout $k \in \{1,\ldots,m\}$, on a $\mathbb{P}(Y=k)>0$.

5. a) Énoncer la formule des probabilités totales.

b) Montrer que, pour tout $\ell \in \{1,\ldots,m\}$, $\displaystyle\mathbb{P}(Z=\ell) = \sum_{k=\ell}^{m} \frac{\mathbb{P}(Y=k)}{k}$.

c) Pour $\ell \in \{1,\ldots,m\}$, montrer que $\mathbb{P}(Z=\ell) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\ell^2}$.

6. **Dans cette question seulement**, on suppose que la loi de Y est donnée par la formule $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{2k}{m(m+1)}$ pour $k \in \{1,\ldots,m\}$.

a) Pour $\ell \in \{1,\ldots,m\}$, que vaut $\mathbb{P}(Z=\ell)$ dans ce cas ?

b) Pour $1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant m$, calculer $\mathbb{P}(Y=k \mid Z=\ell)$.

7. a) On considère des nombres réels positifs $\{a_{k,\ell},\ 1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant \ell \leqslant m\}$. On considère la double somme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell}$. Recopier le tableau ci-dessous en cochant ou noircissant les cases correspondant aux indices k et ℓ pour lesquels le terme $a_{k,\ell}$ apparaît dans cette double somme.

	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=m$
$k=1$					
$k=2$					
$k=3$					
$k=4$					
$k=m$					

Expliquer pourquoi $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell}$.

b) Montrer que $\displaystyle\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Y=k)\frac{k+1}{2}$.

c) Exprimer l'espérance de Z en fonction de celle de Y.

d) Est-il possible d'exprimer la variance de Z uniquement en fonction de la variance de Y ?

On suppose dorénavant que Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels strictement positifs, telle que $Y-1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On suppose toujours que Z est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,\ldots,Y\}$.

8. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(Y=k)$?

b) Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\mathbb{P}(Z=\ell) = \sum_{k=\ell}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(Y=k)}{k}$.

c) Calculer $\mathbb{P}(Z=1)$. ↪

Exercice 3

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer I_0 et I_1.

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.
   b) En déduire I_2.

4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

6. a) Calculer J_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la valeur de J_1.

7. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

8. a) Utiliser les questions 4. et 5. pour déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.
   b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   c) Utiliser la question 5. pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha n}$ avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

9. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(2) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.
   a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

10. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.
   b) En déduire l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \dfrac{1}{2}\big(1 - (-1)^n\big)$.
   c) Montrer alors que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ et conclure.

11. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$. b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$. c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$.

ΞΞΞΞΞ