

DS n° 1
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (*Tous les résultats doivent être justifiés*)

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : il possède trois faces numérotées 1 et trois faces numérotées 6. On tire de l'urne au hasard et simultanément deux dés, puis on les lance. On note A l'événement : “les deux dés sont normaux” et B l'événement : “les deux dés montrent chacun une face six”.

1. Calculer les probabilités des événements A et $\bar{A}$.
2. Calculer la probabilité de B sachant que A est réalisé. En déduire la probabilité de l'événement $A \cap B$.
3. Calculer la probabilité de l'événement B . A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?
4. Calculer la probabilité de A sachant que B est réalisé.
5. Soit C l'événement “au 2ème lancer, les deux dés montrent chacun une face six”. Les événements B et C sont-ils indépendants ?
6. Soit N_n l'événement “être sûr d'avoir choisi 2 dés normaux en au plus n lancers” pour $n \geq 1$. Calculer $\mathbb{P}(N_n)$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(N_n)$. Que constate-t-on ?

Exercice 2 (*Les résultats seront justifiés et donnés sous forme de fractions de nombres entiers*)

Un laboratoire fabrique un éthylotest et les essais montrent que :

- 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété ;
 - 95 fois sur 100 l'éthylotest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
 - 95 fois sur 100 l'éthylotest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.
1. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
 2. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en fait en état d'ébriété ?
 3. Déterminer la probabilité que le résultat donné par l'appareil soit faux.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$ et on a en particulier $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$.

1. a) Déterminer des réels a et b tels que : $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$.

b) En déduire que $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$.

2. Calculer u_1 .
3. Pour tout entier naturel n , exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n . En déduire la valeur de u_2 .
4. a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}.$$

- b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- c) La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?
5. a) Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx.$$

- b) Montrer par encadrement que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$.
- c) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} = \frac{1}{1+2^2+3^2+\dots+n^2}$.

On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme.

On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln(n)$. On rappelle que $v_n \sim \ln(n)$.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ et en déduire que $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$.
- b) Montrer, à l'aide de a), que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n - w_{n+1} \geq 0$.
- c) Soit $x \neq -1$. En partant de l'égalité : $1-x = \frac{1-x^2}{1+x}$, établir que : $\frac{1}{1+x} = 1-x+o(x)$ (V_0), puis que :

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2) \quad (V_0).$$

On admet qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

- d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n - w_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$ et en déduire, grâce à c), que, au

voisinage de $+\infty$: $w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. a) Montrer que la série de terme général $(w_n - w_{n+1})$ est convergente.

- b) En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.

3. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$ et en déduire la nature de la série de terme général u_n .

4. a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$.

- b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1$.

- c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}$.

5. En utilisant la convergence de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln(2)$.

Exercice 5 Comparaison Série / Intégrale

I) On s'intéresse ici à la nature de la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$

1. Montrer que : $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.
2. En déduire que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$, puis conclure quant à la nature de la série.

3. a) Montrer que : $\forall k \geq 3, \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq \frac{1}{k \ln(k)}$ et en déduire, grâce à 2., un encadrement de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$ pour $n \geq 3$.

- b) En déduire que : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

$\hookrightarrow$

II) Généralisation

On considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et décroissante.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq f(k)$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{n+1} f(x) \, dx \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(x) \, dx$.
3. On suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x) \, dx$ est finie. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} f(k)$ converge.
4. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x) \, dx = +\infty$ et que $F(x+1) \underset{+\infty}{\sim} F(x)$.
Montrer que $\sum_{k \geq 0} f(k)$ diverge et que $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} F(n)$.

ΞΞΞΞΞ