DS n° 1

(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les trois questions sont indépendantes)

1. a) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-2x}(3x^2 - x - 1)\,\mathrm{d}x$.

b) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + 2t}$.

2. Un patineur participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Il ne réussit le premier saut que dans 95% des cas. Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10 ; sinon, si tout va bien lors du premier saut, il réussit le deuxième dans 90% des cas. Soit R_1 l'événement : "le patineur réussit le premier saut" et R_2 l'événement : "le patineur réussit le deuxième saut".

a) Calculer la probabilité de l'événement R_2 sachant que R_1 n'est pas réalisé.

b) Calculer la probabilité de l'événement R_2.

c) Un spectateur, arrivé en retard, voit le patineur réussir le deuxième saut. Calculer la probabilité qu'il ait aussi réussi le premier saut.

3. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n2^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une urne qui, à l'origine, contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et, à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

1. Pour k entier naturel non nul, soit A_k l'événement "on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé".

a) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ et vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$.

b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au troisième lancer ?

c) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?

d) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $2k$-ième lancer ?

2. On appelle B l'événement "on a obtenu la boule blanche".

a) Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné de six, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on lance le dé pour la k-ième fois ?

b) En déduire $\mathbb{P}(B \cap A_k)$.

c) Vérifier que, tout $x \in [0,1[$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^k}{k}$ et, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1[$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

d) Soit $x \in [0,1[$. À l'aide d'un encadrement de l'intégrale, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

e) Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Problème 1

1. Soit x un réel strictement positif. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

On notera donc dans la suite : $\forall x \in\,]0,+\infty[,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x < y$. En comparant $f(x)$ et $f(y)$, montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. a) Montrer que, pour tout $x > 0$: $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e-1}{x}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la limite de f en 0.

5. À l'aide d'un changement de variable simple, montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

6. En déduire que : $\forall x > 0,\ f(x) = e^{-x}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}\,\mathrm{d}u\right)$.

7. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{e^u-1}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}.$$

Démontrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

8. Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u-1}{u}\,\mathrm{d}u$ admet une limite finie quand x tend vers 0, sans chercher à la calculer.

9. En déduire un équivalent simple de f en 0.

10. a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, calculer $f'(x)$ (qu'on exprimera à l'aide de $f(x)$) puis montrer que :

$$\forall x > 0,\ f'(x) \leqslant \frac{-1}{x(x+1)}.$$

b) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et justifier que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Problème 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

1. On prend **dans cette question uniquement**, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

a) Vérifier que la série $\sum a_n$ converge et calculer sa somme.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$ diverge.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$ est absolument convergente (*on pourra justifier que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^3|x|^{n-1} = 0$ *puis conclure ou utiliser la règle de d'Alembert*).

En remarquant que $x^n = (n+1)x^n - nx^n$, vérifier que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

d) Montrer que la série $\sum b_n$ converge et que sa somme vaut 2.

2. On prend **dans cette question uniquement**, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et $a_1 = 0$.

a) Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variations (limites comprises).

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ a_n \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ et en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $A_n \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$. Que peut-on dire de la nature de la série $\sum a_n$?

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n a_n$.

d) Déterminer un équivalent de b_n et en déduire que la série $\sum b_n$ diverge.

3. On suppose **dans cette question** que la série $\sum a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{2n} \leqslant u_n$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

c) Démontrer alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

d) Montrer que la série $\sum b_n$ converge.

e) A-t-on : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite positive, décroissante et de limite nulle.

a) Vérifier que : $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \leqslant n,\ B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}$.

b) En déduire que la série $\sum a_n$ converge.

c) Peut-on en déduire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

$\Xi\Xi\Xi\Xi\Xi$