

DM n° 2Exercice 1

E_n désigne l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$). On considère l'application f_n qui, à tout élément P de E_n , associe le polynôme Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Diagonalisabilité de f_n

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de E_n .
2. Déterminer l'image par f_n des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_n = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ de E_n où $e_k : x \mapsto x^k$. Écrire alors la matrice A_n de f_n dans la base $\mathcal{B}_n$.
3. En déduire les valeurs propres de f_n . L'endomorphisme f_n est-il diagonalisable ? Est-ce un automorphisme de E_n ?

2. Recherche des vecteurs propres de f_n

Soit P un vecteur propre de f_n , c'est-à-dire un élément non nul de E_n tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation : $f_n(P) = \lambda P$.

1. Soit $\lambda = 1$. Montrer que P est constant. En déduire les vecteurs propres associés à la valeur propre 1.
2. On suppose maintenant que $\lambda \neq 1$.
 - a) Montrer que 1 est racine de P .
 - b) Soit k l'entier non nul égal à l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P . Il existe donc un polynôme R tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)^k R(x)$ avec $R(1) \neq 0$.
Montrer que : $k = \lambda - 1$ et que R est constant.
 - c) En déduire les vecteurs propres associés à la valeur propre λ .
 - d) Cas particulier : diagonaliser la matrice A_2 .

Exercice 2

1. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = f^3$ où $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f^2$.
 - a) Montrer que f^2 est un projecteur.
 - b) Montrer que : $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Ker}(f^2 - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
 - c) En déduire que : $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \text{Ker}(f^2) = \mathbb{R}^3$.
 - d) Montrer que si f est en plus injectif alors f^2 est aussi injectif et alors $f = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
2. Désormais on suppose de plus que $\text{rg}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 2$.
 - a) Déterminer $\dim \text{Ker}(f^2)$.
 - b) Montrer que $\dim \text{Ker}(f)$ vaut 1 ou 2.
 - c) En déduire que l'on a deux cas possibles :

• soit f est diagonalisable et dans ce cas il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• soit f n'est pas diagonalisable et dans ce cas, il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1-x) + 2 - 2 \cos(x)}{\sin(x) - x}$.
2. a) Montrer que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et préciser l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentant f au point $A(0, 1)$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{4x^2 + 2x + 2}$.
a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f admet des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$, et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

ΥΥΥΥΥ