DM n° 2

Exercice 1

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$ et soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$. On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

1. Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire une valeur propre de f.
2. a) Montrer qu'il existe une matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = CL$.
   b) Montrer que $\mathrm{Tr}(M) = LC$ en identifiant les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à des réels.
   c) Établir que : $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.
3. Montrer que $\mathrm{Tr}(M)$ est une valeur propre de f.
4. On suppose que $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.
5. On suppose que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

Partie II

Soient a, b, c trois réels non nuls et soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$. On suppose que A n'est pas inversible.

6. a) En considérant le système $AX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, établir, en raisonnant par l'absurde, que : $ac = b$.
   b) En déduire le rang de A.
7. a) Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n appartient à $\mathrm{Vect}\{A\}$.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est stable par u si pour tout $x \in F,\ u(x) \in F$.

1. a) Vérifier que -1 et 5 sont valeurs propres de u et déterminer les sous-espaces propres associés E_{-1} et E_5.
   b) Montrer, en utilisant $\mathrm{Tr}(A)$, que -1 et 5 sont les seules valeurs propres de u.
   c) Les sous-espaces E_{-1} et E_5 sont-ils stables par u ?
   d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 qui sont stables par u.
3. Soit P un sous-espace vectoriel de dimension 2 stable par u.
   a) Déterminer P si on suppose en plus que P contient E_5.
   b) Vérifier qu'une solution est $P_1 = \mathrm{Ker}\left((u - 5\,\mathrm{Id})^2\right)$ où $(u - 5\,\mathrm{Id})^2 = (u - 5\,\mathrm{Id}) \circ (u - 5\,\mathrm{Id})$.
4. Soit P un sous-espace vectoriel de dimension 2 stable par u. Que dire de $P \cap P_1$?
5. En déduire tous les sous-espaces vectoriels stables par u.

Exercice 3 (Les deux questions sont indépendantes)

1. a) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\frac{1}{x}\ln(1+x)$.

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

   c) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\sqrt{|x^2-1|}$.

   a) Justifier que : $\forall x\in[-1,1],\ f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$, puis déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de 0.

   En déduire la dérivabilité de f en 0, $f'(0)$ puis l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f au point d'abscisse $x=0$, ainsi que la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ au voisinage de ce point.

   b) Étudier l'existence d'asymptotes à $\mathcal{C}$ et donner la position de $\mathcal{C}$ par rapport à celles-ci au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

ϒϒϒϒϒ