

DM n° 1Exercice 1

Une urne contient N jetons numérotés $1, 2, \dots, k$ ($3 \leq k \leq N$).

Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note p_i la proportion de jetons portant le numéro i .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue dans cette urne n tirages successifs d'un jeton avec remise.

1. On appelle X_i la variable aléatoire qui vaut 0 si au cours des n tirages le numéro i a été tiré et 1 sinon. Déterminer la loi de X_i .

2. La variable aléatoire Z_n compte le nombre de numéros qui n'ont pas été tirés au cours des n premiers tirages.

a) Exprimer Z_n en fonction des X_i .

b) Calculer l'espérance de Z_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

3. Comparer $\mathbb{P}(Z_n \geq 1)$ et $\mathbb{E}(Z_n)$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1$.

Exercice 2

Une urne est remplie de boules noires et de boules blanches indiscernables au toucher. La proportion de boules noires est p , avec $0 < p < 1$. On effectue une succession illimitée de tirages, avec remise, d'une boule de cette urne.

1. On note N (respectivement B) le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour obtenir la première boule noire (respectivement blanche).

a) Quelles sont les lois respectives de N et B ?

b) Les variables aléatoires N et B sont-elles indépendantes ?

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages à partir du premier amenant le même résultat que le premier résultat et Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages amenant alors le résultat contraire jusqu'à ce qu'on retrouve le premier résultat.

Par exemple, N (resp. B) désignant le tirage d'une boule noire (resp. blanche), si on obtient la succession de résultats $N N N B B N \dots$, on réalise l'événement $(X = 3)$ et l'événement $(Y = 2)$.

a) Déterminer la loi de X . Montrer que X admet une espérance que l'on calculera. Quand cette espérance est-elle minimale ? Admet-elle un maximum ?

b) Déterminer la loi de Y . Montrer que Y admet une espérance que l'on calculera.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y et l'on note $X \leq_{st} Y$ si l'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y \geq t)$.

Partie I

Soit $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, une fonction croissante et bornée.

1. La fonction h admet-elle une limite finie en $+\infty$? Justifier.

2. Montrer que $h(X)$ et $h(Y)$ admettent des espérances que l'on notera $\mathbb{E}(h(X))$ et $\mathbb{E}(h(Y))$.

3. Montrer que la série de terme général $(h(n) - h(n-1))$ converge.

4. Montrer que la série de terme général $(h(n) - h(n-1))\mathbb{P}(X \geq n)$ converge.

5. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \geq N+1) = 0$.

6. Établir la relation suivante : $\mathbb{E}(h(X)) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1))\mathbb{P}(X \geq n)$.

7. En déduire que si $X \leq_{st} Y$, alors $\mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(h(Y))$.

Partie II

On souhaite montrer la réciproque.

On suppose que pour toute fonction $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ croissante et bornée, on a :

$$\mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(h(Y)).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit h_n la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall i \in \mathbb{N}, h_n(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n \\ 1 & \text{si } i \geq n \end{cases}$.

Montrer que la fonction h_n est croissante et bornée.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{P}(Y \geq n)$.
3. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y .
4. Énoncer le théorème que vous venez de démontrer.

Partie III

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, telles que $X \leq_{st} Y$. Soit Z une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X .

1. Montrer que : $\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y \geq k)$.
2. En déduire que : $\mathbb{P}(X \leq Y) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Z \geq k)$.
3. Montrer que : $\mathbb{P}(Z \geq X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Z \geq k)$.
4. Montrer que : $\mathbb{P}(Z = X) > 0$.
5. En déduire que : $\mathbb{P}(Z \geq X) > \frac{1}{2}$.
6. Montrer que : $\mathbb{P}(X \leq Y) > \frac{1}{2}$.

ΥΥΥΥΥ