DM n° 1

Exercice 1

On dispose d'une urne contenant une boule rouge et une boule noire. On tire une boule dans l'urne avec remise jusqu'à tirer la boule rouge et on note n le nombre de tirages effectués. Dans un 2 ème temps, on effectue n tirages avec remise dans cette même urne.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour tirer la boule rouge et X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées dans un 2 ème temps.

1. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbb{P}_{(Z=n)}(X = 0)$. En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.
3. Préciser le support de X, puis calculer $\mathbb{P}_{(Z=n)}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

   Montrer que : $\forall k \in X(\Omega) \setminus \{0\},\ \mathbb{P}(X = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
4. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{4^{n-k}}$. Exprimer $4S_k + S_{k+1}$ en fonction de S_{k+1} et en déduire S_k.
5. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout événement A, on note $\mathbb{1}_A$ sa variable aléatoire indicatrice.

Soit q, r deux réels de $]0, 1[$. Deux joueurs jouent à lancer chacun une pièce qui peut faire Pile (P) ou Face (F). Le joueur G joue avec une pièce avec laquelle la probabilité de faire Pile est $1 - q$; le joueur R joue avec une pièce avec laquelle la probabilité de faire Pile est $1 - r$. Ils lancent simultanément chacun leur pièce (de façon indépendante), et répètent l'expérience (de façon indépendante).

On note T_G (respectivement T_R) la variable aléatoire égale au rang du premier lancer où G (respectivement R) fait Pile ; on considère les événements :

$$A_1 = (T_G < T_R), \quad A_2 = (T_R < T_G), \quad A = (T_G \neq T_R).$$

On note T la variable aléatoire égale au rang du premier lancer où apparaît au moins un Pile et J la variable aléatoire $J = \mathbb{1}_{A_1} + 2 \times \mathbb{1}_{A_2}$.

1. a) Préciser les lois de T_G et T_R, puis calculer la probabilité $p = \mathbb{P}(A_1)$.
   b) Que vaut p si $q = r$? si $q = r = \dfrac{1}{2}$?
2. a) Déterminer la loi conditionnelle de T_G sachant A_1 réalisé.
   b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}_{A_1}(T_G > k)$.

On suppose dans la suite que $q = r$. On note $\mathbb{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A. Soit $k \in \mathbb{N}$.

3. a) Que représente la variable aléatoire J ?
   b) Calculer $\mathbb{P}\big[A \cap (J = 1) \cap (T > k)\big]$.
   c) En déduire la valeur de $P_A\big[(J = 1) \cap (T > k)\big]$.
   d) Que vaut $\mathbb{P}_A(J = 1)$?
   e) Comparer $\mathbb{P}_A\big[(J = 1) \cap (T > k)\big]$ et $\mathbb{P}_A\big[(J = 2) \cap (T > k)\big]$, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}_A(T > k)$.
   f) Montrer que les variables aléatoires T et J sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}_A$.

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et qui suivent toutes la loi uniforme discrète sur $\{-1;1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. a) Pour un réel t et un entier k donnés, montrer que la variable e^{tX_k} admet une espérance et la calculer.

Dans la suite, on note $\varphi(t) = \mathbb{E}\big(e^{tX_k}\big)$.

b) Montrer que, pour tout réel t, $\varphi(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^2}{2} - \ln(\varphi(t))$.

2. a) Pour tout réel t, montrer que $\mathbb{E}\big(e^{tS_n}\big) = \big(\varphi(t)\big)^n$.

b) Pour tout réel t, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(e^{\frac{tS_n}{\sqrt{n}}}\Big)$. *On rappelle que :* $e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$ (V_0).

3. Soit a un réel positif.

a) Montrer que, pour tout réel positif t : $\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\big(e^{tS_n}\big)}{e^{ta}}$.

b) À l'aide des questions précédentes, en déduire que : $\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

c) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \leqslant -a) = \mathbb{P}(S_n \geqslant a)$ puis déterminer une majoration de $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a)$.

ϒϒϒϒϒ