

DM n° 0**Exercice 1** Les deux questions sont indépendantes

1. Pour chacune des séries, déterminer pour quelle(s) valeurs de x elles convergent et calculer leur somme :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} (2x)^n ; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} e^{nx} ; \quad \text{c) } \sum_{n \geq 0} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n!} \text{ avec } x \geq 0.$$

2. À l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t^2} dt \text{ avec } x = \frac{1}{t} ; \quad \text{b) } J = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \text{ avec } t = \sin(x).$$

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = \text{Arc tan} \left(n + \frac{1}{n} \right) - \text{Arc tan}(n)$ pour $n \geq 1$.

1. a) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite positive qui converge vers 0.

b) Justifier que : $\forall n \geq 1, u_n \leq v_n$ où $v_n = \text{Arc tan}(n+1) - \text{Arc tan}(n)$.

c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et calculer sa somme.

d) En déduire que $\sum u_n$ converge et donner un encadrement de sa somme, notée S .

2. a) En appliquant le théorème des accroissements finis à Arc tan sur un intervalle adapté, montrer que : $\forall n \geq 1, u_n \leq \frac{1}{n(n^2+1)}$.

b) Justifier que : $\forall n \geq 2, \int_{n-1}^n \frac{1}{x^3} dx \geq \frac{1}{n^3}$ et en déduire que : $\forall N \geq 2, \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2}$.

c) Que peut-on dire de la nature et de la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$?

d) Justifier que : $\forall n \geq 1, u_n \leq \frac{1}{n^3}$. Quelle nouvelle majoration de S obtient-on ? Comparer avec 1. d).

3. a) Justifier que : $\forall n \geq 2, u_n \leq \frac{1}{n(n^2-1)}$.

b) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \geq 2, \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{a}{n(n-1)} + \frac{b}{n(n+1)}$.

c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n^2-1)}$ converge et calculer sa somme.

d) Déduire de ce qui précède une nouvelle majoration de S . Comparer avec les majorations précédentes.

Exercice 3

On considère la fonction ϕ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad \phi(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

Partie A : Étude de la fonction ϕ

1. Montrer que la fonction ϕ est continue sur $]-\infty, 1]$.
2. a) Justifier que ϕ est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ et calculer, pour tout x de $]-\infty, 1[$, $\phi'(x)$.
b) En déduire les variations de ϕ sur $]-\infty, 1]$.
c) La fonction ϕ est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer la limite de ϕ en $-\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de ϕ en soignant le tracé aux voisinages de $x = 0$ et de $x = 1$.
5. a) Soit $a \in]0, 1]$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_a^1 t \ln(t) dt$ admet une limite finie lorsque a tend vers 0 à droite et calculer cette limite.

b) En déduire que : $\lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \phi(x) dx = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0; 1[$.

6. a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0; x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

8. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

9. a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$$

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \phi(x)$.

10. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \phi(1)$.