Programme de la colle n° 5 (du 1/12 au 13/12)

Réduction des endomorphismes (suite)

Révision du programme précédent (partie concernant ce chapitre).

Endomorphisme diagonalisable : définition par l'existence d'une matrice diagonale.
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espace propres, spectre d'un endomorphisme en dimension finie ; théorème : caractérisation des valeurs propres en dimension finie à l'aide de $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$, de $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ ou du système $(A - \lambda I_n)X = 0$.
Point de vue matriciel : éléments propres d'une matrice, correspondance entre les éléments propres d'une matrice et de l'endomorphisme associé ; λ est valeur propre de $A \iff A - \lambda I_n$ est non inversible ; les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux. Mise en pratique sur un exemple en utilisant une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$.

Somme de sous-espaces propres : théorème sur la somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ; conséquences : une famille de vecteurs propres associés à des v. p. distinctes est libre, un endomorphisme admet au plus n v. p. distinctes en dimension n.

Critères de diagonalisabilité : th. 1 : caractérisation à l'aide d'une base de vecteurs propres ; th. 2 : condition suffisante utilisant le nombre de v. p. distinctes ; th. 3 : caractérisation à l'aide des sous-espaces propres ; conséquence : critère utilisant les dimensions des s. e. p.

Question de cours :

Elle portera uniquement sur le programme ci-dessus. Les démonstrations vues en cours ne sont pas exigibles, sauf dans les cas très simples, mais des questions générales peuvent être posées à leur sujet, ainsi que toute question visant à tester la bonne compréhension du cours.