Programme de la colle n° 5 (du 2/12 au 14/12)

Réduction des endomorphismes (début)

Sommes de sous-espaces vectoriels en dimension finie : définition, propriétés ; somme directe, caractérisations utilisant la décomposition du vecteur nul, l'intersection, les bases, la dimension ; généralisation à p sous-espaces vectoriels.
Sous-espaces supplémentaires : définition, caractérisations ; supplémentaire d'un s.e.v., non unicité ; existence d'un supplémentaire et dimension ; formule de Grassmann (admise) ; propriétés : caractérisation des supplémentaires à l'aide de la condition sur les dimensions.
Projections en dimension finie : définition ; propriétés ; projecteur : définition ; équivalence entre projections et projecteurs.
Symétries en dimension finie : définition, lien avec la projection ; propriétés ; involution : définition ; équivalence entre symétries et involutions.

Endomorphisme diagonalisable : définition par l'existence d'une matrice diagonale.
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espace propres, spectre d'un endomorphisme en dimension finie ; théorème : caractérisation des valeurs propres en dimension finie à l'aide de $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id})$, de $u - \lambda \, \mathrm{Id}$ ou du système $(A - \lambda I_n)X = 0$.
Point de vue matriciel : éléments propres d'une matrice, correspondance entre les éléments propres d'une matrice et de l'endomorphisme associé ; λ est valeur propre de $A \Longleftrightarrow A - \lambda I_n$ est non inversible ; les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux. Mise en pratique sur un exemple en utilisant une réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$.

Somme de sous-espaces propres : théorème sur la somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ; conséquences : une famille de vecteurs propres associés à des v. p. distinctes est libre, un endomorphisme admet au plus n v. p. distinctes en dimension n.

Question de cours :

Elle portera uniquement sur le programme ci-dessus. Les démonstrations vues en cours ne sont pas exigibles, sauf dans les cas très simples, mais des questions générales peuvent être posées à leur sujet, ainsi que toute question visant à tester la bonne compréhension du cours.

N. B. : En 1ère semaine, les exercices porteront d'abord sur le début du chapitre (sommes de sous-espaces, projections, symétries). Les critères usuels de diagonalisabilité ne font pas partie de ce programme, ils seront dans le prochain, mais on peut utiliser la définition d'un endomorphisme diagonalisable.