Programme de la colle n° 4 (du 17/11 au 29/11)

I) Fonctions polynômes

Fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[x]$, cas d'égalité de deux polynômes ; degré, terme et coefficient dominant, polynôme unitaire, $\mathbb{R}_n[x]$ et rappel de sa structure vectorielle (dimension, base canonique) ; opérations dans $\mathbb{R}[x]$; degré d'une somme, de λP, d'un produit.
Divisibilité, polynôme irréductible ; division euclidienne : existence et unicité du quotient et du reste admises, degré du quotient ; reste de la division par $x \longmapsto x - a$.
Racines d'un polynôme : définition, caractérisation à l'aide de la division par $x - a$, généralisation à n racines 2 à 2 distinctes, conséquence : tout polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[x]$ a au plus n racines distinctes ; définition d'une racine d'ordre n (sans la dérivation).
Dérivation dans $\mathbb{R}[x]$: polynôme dérivé, dérivées successives d'un polynôme.
Caractérisation des racines multiples : α est racine d'ordre n de $P \iff \alpha$ est racine d'ordre $n-1$ de P' et racine de $P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$ (admis) ; propriété : une fonction polynôme P admet un extremum local en x_0 si, et seulement si, x_0 est une racine de P' d'ordre de multiplicité impair.
Théorème de d'Alembert-Gauss (admis) ; conséquence : tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ se décompose en un produit de facteurs du premier degré à l'aide des racines dans $\mathbb{C}$ (admis).

II) Réduction des endomorphismes (début)

Sommes de sous-espaces vectoriels en dimension finie : définition, propriétés ; somme directe, caractérisations utilisant la décomposition du vecteur nul, l'intersection, les bases, la dimension ; généralisation à p sous-espaces vectoriels.
Sous-espaces supplémentaires : définition, caractérisations ; supplémentaire d'un s.e.v., non unicité ; existence d'un supplémentaire et dimension ; formule de Grassmann (admise) ; propriétés : caractérisation des supplémentaires à l'aide de la condition sur les dimensions.
Projections en dimension finie : définition ; propriétés ; projecteur : définition ; équivalence entre projections et projecteurs.
Symétries en dimension finie : définition, lien avec la projection ; propriétés ; involution : définition ; équivalence entre symétries et involutions.

Question de cours :

Elle portera uniquement sur le programme ci-dessus (hors révision). Les démonstrations vues en cours ne sont pas exigibles, sauf dans les cas très simples, mais des questions générales peuvent être posées à leur sujet, ainsi que toute question visant à tester la bonne compréhension du cours.

N. B. : En 1ère semaine, les exercices porteront uniquement sur le I)