TD n° 9 : Nombres complexes

Exercice 1

Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

$$z_1 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 \ ; \ z_2 = (1-5i)^2 \ ; \ z_3 = (2+3i)^3 \ ; \ z_4 = \frac{4-i}{2i-5} \ ; \ z_5 = \frac{1}{i} \ ; \ z_6 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2.$$

Exercice 2

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; calculer j^2.

En déduire les relations : $1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = 1$; $\frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.

Exercice 3

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$x = 1 + i \ ; \ y = 1 - i\sqrt{3} \ ; \ z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} \ ; \ t = (1-i)^8(1+i\sqrt{3})^{-6} \ ; \ u = \frac{2}{(1-i)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Exercice 4

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $Z = z^2 + 2z - 3$ soit un nombre réel. Quelles sont leurs images dans le plan ?

Exercice 5

Soient θ et θ' deux nombres réels. Montrer que :

a) $e^{i\theta} + 1 = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ b) $e^{i\theta} - 1 = 2ie^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ c) $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$

Exercice 6

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 avec $|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1 z_2 \neq -1$.

Montrer que $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Linéariser les expressions suivantes : $A(x) = \sin^3(2x)$ et $B(x) = \sin^2(3x)\cos(x)$.

Exercice 8

Résoudre les équations : (1) $z^2 = -2 + 2i$; (2) $z^2 = 3 - 4i$; (3) $z^5 = \bar{z}$

Exercice 9

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, on pose $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

Calculer $S + iT$ puis en déduire S et T.

Exercice 10

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$ et $T(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx)$.

b) En déduire le calcul de : $U(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx)\cos(kx)$.

Indications pour les exercices du TD n° 9

ex. 1 : pour les fractions, on peut utiliser : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ ou multiplier et diviser par le conjugué.
ex. 2 : on trouve $j^2 = \bar{j}$ et les relations se vérifient simplement.
ex. 3 : pour les produits et les fractions, utiliser les propriétés du module et de l'argument.
ex. 4 : utiliser la caractérisation des réels par le conjugué ou travailler avec la forme algébrique de z.
ex. 5 : utiliser les formules d'Euler et développer.
ex. 6 : utiliser $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ et $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$ pour calculer $\bar{Z}$.
ex. 7 : utiliser les formules d'Euler.
ex. 8 : a) c) utiliser la forme exponentielle de z ; b) utiliser la forme algébrique de z et l'égalité des modules
ex. 9 : reconnaître le développement de $(1+e^{ix})^n$; utiliser l'ex. 5 pour déterminer partie réelle et partie imaginaire.
ex. 10 : a) calculer $S(x)+iT(x)$ puis séparer partie réelle et partie imaginaire ; b) linéariser $\sin(\theta)\cos(\theta)$ puis utiliser a).

Indications pour les exercices du TD n° 9

ex. 1 : pour les fractions, on peut utiliser : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ ou multiplier et diviser par le conjugué.
ex. 2 : on trouve $j^2 = \bar{j}$ et les relations se vérifient simplement.
ex. 3 : pour les produits et les fractions, utiliser les propriétés du module et de l'argument.
ex. 4 : utiliser la caractérisation des réels par le conjugué ou travailler avec la forme algébrique de z.
ex. 5 : utiliser les formules d'Euler et développer.
ex. 6 : utiliser $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ et $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$ pour calculer $\bar{Z}$.
ex. 7 : utiliser les formules d'Euler.
ex. 8 : a) c) utiliser la forme exponentielle de z ; b) utiliser la forme algébrique de z et l'égalité des modules
ex. 9 : reconnaître le développement de $(1+e^{ix})^n$; utiliser l'ex. 5 pour déterminer partie réelle et partie imaginaire.
ex. 10 : a) calculer $S(x)+iT(x)$ puis séparer partie réelle et partie imaginaire ; b) linéariser $\sin(\theta)\cos(\theta)$ puis utiliser a).