TD n° 8 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1

1. Montrer que $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et la dimension.

2. Même question avec $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} -a & 2b & -c \\ b & 0 & 2a \\ 3c & -a & b \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_4[x] \mid \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^4 + (2b-a)x^3 + (a+b)x + 5b\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$ et en donner une base.

Exercice 3

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, est un isomorphisme.

2. En déduire que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \exists\,!\,P \in \mathbb{R}_2[x],\ \begin{cases} P(0) = a \\ P(1) = b\,. \\ P(2) = c \end{cases}$

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$. Montrer que φ est linéaire et en déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $f(P)$ est la fonction $f(P) : x \longmapsto (x^2-1)P''(x) + (-x+1)P'(x)$.
1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer l'image et le noyau de f, dont on donnera des bases.

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soient $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P + P' + \cdots + P^{(n)} \end{array}$.

a) Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.
b) Déterminer $g \circ f$. En déduire que f est bijective et trouver f^{-1}.
c) Soit $Q : x \longmapsto 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x - 6 \in \mathbb{R}_4[x]$. Déterminer l'antécédent P de Q par f.

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_1[x])$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = 2P(x) + (1-x)P'(x)$.
Écrire la matrice de f dans les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}_1[x]$, puis déterminer le rang de f.

Indications pour les exercices du TD n° 8

Ex. 1 : 1. décomposer les matrices en combinaisons linéaires de plusieurs matrices, puis vérifier la liberté de la famille génératrice obtenue.
Ex. 2 : montrer que E est engendré par une famille de deux fonctions polynômes.
Ex. 3 : 1. montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ en raisonnant sur les solutions de $P(x) = 0$ si $P \in \operatorname{Ker} f$, puis $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathbb{R}^3$; 2. appliquer la définition de la bijectivité.
Ex. 4 : ok pour la linéarité, puis utiliser le noyau de φ.
Ex. 5 : 1. vérifier que $f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$, puis la linéarité ; 2. calculer l'image des vecteurs de la base canonique et utiliser le th. du rang. par ex.
Ex. 6 : a) Ok grâce aux propriétés de la dérivation ; b) calculer $g \circ f(P)$ en utilisant $P^{(n+1)} = 0$; vérifier que f est injective ; c) $P = f^{-1}(Q) = g(Q)$.
Ex. 7 : calculer l'image des vecteurs de la base canonique, écrire la matrice et calculer son rang.