TD n° 7 : Applications linéaires et Matrices (2)

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f((x,y,z)) = (-x-2y+z, x-y, 3x+2y-z)$.
a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
b) Calculer le rang de A. Qu'en déduit-on pour f ?
c) Déterminer $f^3((x,y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, A et B les matrices de f et g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer le noyau et l'image de f et g.
b) Déterminer la matrice de $g \circ f$.
Déterminer, si possible sans calculs, le noyau et l'image de $g \circ f$.
c) Soit $H = \mathrm{Vect}\{u\}$ où $u = (1,1,1)$ et soit $\tilde{f}$ la restriction de f à H.
Déterminer $\mathrm{Im}(\tilde{f})$ et vérifier que $\tilde{f} \in \mathcal{L}(H)$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{f})$ où $\mathcal{B} = (u)$.

Exercice 3

Soient $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (3,1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
a) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{u_1\}$ et $f(u_2) = u_1$.
b) Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$, puis déterminer $f^2 = f \circ f$.
c) Déterminer la matrice A' de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u = (0,1,1), v = (1,0,1), w = (1,1,0)$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, puis déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ du vecteur $t = (1,1,1)$.

Exercice 5

1. Montrer que $e_1 = (-1,0,1)$, $e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (0,-1,1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit $u = (a,b,c)$ et $v = (c,b,a)$. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que les coordonnées de v dans cette base soient celles de u dans la base $\mathcal{B}$, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Soit t réel et la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et f_t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $A(t)$ dans la base canonique.
a) Déterminer pour quelles valeurs de t, $A(t)$ est inversible. Dans le cas où $A(t)$ n'est pas inversible, trouver une base de $\mathrm{Ker}(f_t)$ et de $\mathrm{Im}(f_t)$.
b) Trouver deux réels a et b, dépendant de t, tels que $f_t^3 = a f_t + b\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
En déduire que $A(t)$ est semblable à $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 2-t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables.
b) Montrer que A est inversible si et seulement si B est inversible et que, dans ce cas, A^k et B^k sont semblables pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a) Trouver une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $\begin{cases} f(u_3) = -u_3 \\ f(u_2) = u_3 - u_2 \\ f(u_1) = u_2 - u_1 \end{cases}$.

b) Démontrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9

Montrer que les matrices A et A' suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on suppose que A est non nulle, nilpotente et que n est le plus petit entier tel que $A^n = 0$. On appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire $\mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 11

a) Pourquoi l'équation : $AB - BA = I_n$ n'a-t-elle pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

b) Montrer que, si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $(AB - BA)^2$ est une matrice scalaire.

Indications pour les exercices du TD n° 7

Ex. 1 : a) calculer les images des vecteurs de la b. can. ; b) ok et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\, A$; c) calculer A^3.
Ex. 2 : a) utiliser les colonnes pour l'image et résoudre $A.X = 0$ pour le noyau ; b) faire le produit BA ; c) calculer l'image de u.
Ex. 3 : a) déterminer f sur la base (u_1, u_2) ; b) calculer A^2 ; c) calculer les images des vecteurs de la base canonique ou $A' = P^{-1}AP$.
Ex. 4 : a) ok ; b) écrire la 1ère puis calculer son inverse et appliquer la formule de changement de base.
Ex. 5 : 1. Ok ; 2. utiliser la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$; 3. introduire la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$, déterminer d'abord son inverse, puis la matrice elle-même.
Ex. 6 : a) calculer le rang de $A(t)$ en fonction de t ; b) calculer $A(t)^3$ puis choisir une nouvelle base du type $(e_1, f_t(e_1), f_t^2(e_1))$.
Ex. 7 : a) récurrence sur k ; b) utiliser l'endomorphisme associé à A et B ou des relations matricielles.
Ex. 8 : a) trouver d'abord u_3 en résolvant un système puis u_2 et u_2 ; b) écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}'$; c) calculer B^n et en déduire A^n.
Ex. 9 : chercher une base dans laquelle l'application linéaire u_A canoniquement associée à A a pour matrice A' (permutation des vecteurs).
Ex. 10 : montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\mathcal{B} = (u^{n-2}(x), u^{n-1}(x))$ et écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Ex. 11 : a) trace... ; b) montrer que $AB - BA$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et conclure.