TD n° 6 : Applications linéaires et Matrices (1)

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, -x+2y, 2x-4y) \end{array}$

a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer un vecteur qui engendre $\mathrm{Ker}(f)$.
c) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u = (1, -1, 2)$.

Exercice 2

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+z+2t, y+z+t, 2x+2y+4z+6t) \end{array}$

a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, puis déterminer le rang de f et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que les vecteurs $u = (1, 1, -1, 0)$ et $v = (2, 1, 0, -1)$ en forment une base.

Exercice 3

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et F un s.e.v. de $\mathbb{R}^p$.

1. Montrer que $f(F)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, puis que $\dim f(F) \leqslant \dim F$.
2. Déterminer $f(F)$ lorsque $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ et f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f((x, y, z)) = (2x - y + 4z, -x + 3y - 2z, 3x + 5y + 6z)$.

Exercice 4

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que, si $\mathrm{rg}(f) = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f = \lambda f$. Réciproque ?
2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, montrer que si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 5

a) Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ et $B = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}$. Construire un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = A$ et $\mathrm{Im}(f) = B$.
b) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour qu'il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mathrm{Ker}(f) = A$ et $\mathrm{Im}(f) = B$.

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, tel que $(f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^n$, où f^k désigne $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que $f^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

Exercice 7

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On note u^2 l'application $u \circ u$.

Montrer que : 1) $u^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$
2) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Exercice 8

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que : $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
b) Montrer que, si $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, alors : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

Indications pour les exercices du TD n° 6

Ex. 1 : a) ok ; b) résoudre $f((x,y)) = 0_{\mathbb{R}^3}$; c) calculer l'image des vecteurs de la base canonique.
Ex. 2 : a) calculer le rang du système formé des images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$; b) théorème du rang, puis vérifier que la famille donnée est libre et dans $\mathrm{Ker}(f)$.
Ex. 3 : 1. vérifier la définition d'un s.e.v., puis utiliser une base de F pour trouver une famille génératrice de $f(F)$; 2. trouver une base de F et appliquer 1.
Ex. 4 : 1. utiliser une base (a) de $\mathrm{Im}(f)$ pour calculer $f \circ f(x)$; 2. montrer que l'image par g d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est une base de $\mathrm{Im}(g \circ f)$.
Ex. 5 : a) compléter une base de A en une base de $\mathbb{R}^3$ puis construire une application linéaire telle que $A \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = B$; b) raisonner par double implication ; construire une application linéaire de noyau A et d'image B en complétant une base de A pour obtenir une base de $\mathbb{R}^n$.
Ex. 6 : 1. vérifier que f est surjectif ; 2. montrer que $\mathcal{B}$ est libre en partant d'une combinaison linéaire nulle et en composant par f ; 3. vérifier que l'égalité est vraie pour x puis pour tous les vecteurs de $\mathcal{B}$.
Ex. 7 : raisonner par implication directe et réciproque en exploitant les définitions de l'image et du noyau.
Ex. 8 : a) raisonner sur des vecteurs en appliquant les définitions ; b) utiliser $g = g \circ f \circ g$ et $f \circ g \circ f = f$.

Indications pour les exercices du TD n° 6

Ex. 1 : a) ok ; b) résoudre $f((x,y)) = 0_{\mathbb{R}^3}$; c) calculer l'image des vecteurs de la base canonique.
Ex. 2 : a) calculer le rang du système formé des images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$; b) théorème du rang, puis vérifier que la famille donnée est libre et dans $\mathrm{Ker}(f)$.
Ex. 3 : 1. vérifier la définition d'un s.e.v., puis utiliser une base de F pour trouver une famille génératrice de $f(F)$; 2. trouver une base de F et appliquer 1.
Ex. 4 : 1. utiliser une base (a) de $\mathrm{Im}(f)$ pour calculer $f \circ f(x)$; 2. montrer que l'image par g d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est une base de $\mathrm{Im}(g \circ f)$.
Ex. 5 : a) compléter une base de A en une base de $\mathbb{R}^3$ puis construire une application linéaire telle que $A \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = B$; b) raisonner par double implication ; construire une application linéaire de noyau A et d'image B en complétant une base de A pour obtenir une base de $\mathbb{R}^n$.
Ex. 6 : 1. vérifier que f est surjectif ; 2. montrer que $\mathcal{B}$ est libre en partant d'une combinaison linéaire nulle et en composant par f ; 3. vérifier que l'égalité est vraie pour x puis pour tous les vecteurs de $\mathcal{B}$.
Ex. 7 : raisonner par implication directe et réciproque en exploitant les définitions de l'image et du noyau.
Ex. 8 : a) raisonner sur des vecteurs en appliquant les définitions ; b) utiliser $g = g \circ f \circ g$ et $f \circ g \circ f = f$.