L. Sup. B/L Novembre 2025

## TD n°6: Applications linéaires et Matrices (1)

## Exercice 1

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  $(x,y) \longmapsto (x-2y,-x+2y,2x-4y)$ 

- a) Montrer que f est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Déterminer un vecteur qui engendre Ker(f).
- c) Montrer que Im(f) est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par u=(1,-1,2).

## Exercice 2

Soit 
$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
  
 $(x, y, z, t) \longmapsto (x + z + 2t, y + z + t, 2x + 2y + 4z + 6t)$ 

- a) Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ , puis déterminer le rang de f et donner une base de  $\mathrm{Im}(f)$ .
- b) En déduire la dimension de Ker(f) et vérifier que les vecteurs u=(1,1,-1,0) et v=(2,1,0,-1) en forment une base.

#### Exercice 3

Soient  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$  et F un s.e.v. de  $\mathbb{R}^p$ .

- 1. Montrer que f(F) est un s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$ , puis que dim  $f(F) \leq \dim F$ .
- 2. Déterminer f(F) lorsque  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x y + 2z = 0\}$  et f est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par : f((x, y, z)) = (2x y + 4z, -x + 3y 2z, 3x + 5y + 6z).

#### Exercice 4

Soit f un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ .

- 1. Montrer que, si  $\operatorname{rg}(f) = 1$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f \circ f = \lambda f$ . Réciproque?
- 2. Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , montrer que si  $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ , alors  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$ .

## Exercice 5

- a) Soit  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$  et  $B = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ . Construire un endomorphisme f de  $\mathbb{R}^3$  tel que Ker(f) = A et Im(f) = B.
- b) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour qu'il existe un endomorphisme f de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $\operatorname{Ker}(f) = A$  et  $\operatorname{Im}(f) = B$ .

#### Exercice 6

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ , tel que  $(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$  soit une base de  $\mathbb{R}^n$ , où  $f^k$  désigne  $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}$ .

- 1. Montrer que f est un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$ .
- 2. Montrer que  $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .
- 3. Montrer qu'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tels que  $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ .

#### Exercice 7

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . On note  $u^2$  l'application  $u \circ u$ .

Montrer que : 1) 
$$u^2 = 0 \iff \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$$
  
2)  $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2) \iff \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$ 

### Exercice 8

Soient f et g deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$ .

- a) Montrer que :  $\operatorname{Im}(q \circ f) \subset \operatorname{Im}(q)$  et  $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(q \circ f)$ .
- b) Montrer que, si  $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ , alors :  $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$  et  $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$ .

## Indications pour les exercices du TD n° 6

noyau.

- Ex. 1 : a) ok; b) résoudre  $f((x,y)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ; c) calculer l'image des vecteurs de la base canonique.
- Ex. 2 : a) calculer le rang du système formé des images des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ ; b) théorème du rang, puis vérifier que la famille donnée est libre et dans  $\operatorname{Ker}(f)$ .
- Ex. 3 : 1. vérifier la définition d'un s.e.v., puis utiliser une base de F pour trouver une famille génératrice de f(F); 2. trouver une base de F et appliquer 1.
- Ex. 4 : 1. utiliser une base (a) de  $\operatorname{Im}(f)$  pour calculer  $f \circ f(x)$ ; 2. montrer que l'image par g d'une base de  $\operatorname{Im}(f)$  est une base de  $\operatorname{Im}(g \circ f)$ .
- Ex. 5 : a) compléter une base de A en une base de  $\mathbb{R}^3$  puis construire une application linéaire telle que  $A \subset \operatorname{Ker}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f) = B$ ; b) raisonner par double implication; construire une application linéaire de noyau A et d'image B en complétant une base de A pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^n$ .
- Ex. 6 : 1. vérifier que f est surjectif ; 2. montrer que  $\mathfrak B$  est libre en partant d'une combinaison linéaire nulle et en composant par f ; 3. vérifier que l'égalité est vraie pour x puis pour tous les vecteurs de  $\mathfrak B$ . Ex. 7 : raisonner par implication directe et réciproque en exploitant les définitions de l'image et du
- Ex. 8 : a) raisonner sur des vecteurs en appliquant les définitions ; b) utiliser  $g = g \circ f \circ g$  et  $f \circ g \circ f = f$ .

# Indications pour les exercices du TD n° 6

- Ex. 1 : a) ok; b) résoudre  $f((x,y)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ; c) calculer l'image des vecteurs de la base canonique.
- Ex. 2 : a) calculer le rang du système formé des images des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ ; b) théorème du rang, puis vérifier que la famille donnée est libre et dans  $\operatorname{Ker}(f)$ .
- Ex. 3 : 1. vérifier la définition d'un s.e.v., puis utiliser une base de F pour trouver une famille génératrice de f(F); 2. trouver une base de F et appliquer 1.
- Ex. 4 : 1. utiliser une base (a) de  $\mathrm{Im}(f)$  pour calculer  $f\circ f(x)$ ; 2. montrer que l'image par g d'une base de  $\mathrm{Im}(f)$  est une base de  $\mathrm{Im}(g\circ f)$ .
- Ex. 5 : a) compléter une base de A en une base de  $\mathbb{R}^3$  puis construire une application linéaire telle que  $A \subset \mathrm{Ker}(f)$  et  $\mathrm{Im}(f) = B$ ; b) raisonner par double implication; construire une application linéaire de noyau A et d'image B en complétant une base de A pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^n$ .
- Ex. 6 : 1. vérifier que f est surjectif ; 2. montrer que  $\mathcal B$  est libre en partant d'une combinaison linéaire nulle et en composant par f ; 3. vérifier que l'égalité est vraie pour x puis pour tous les vecteurs de  $\mathcal B$ . Ex. 7 : raisonner par implication directe et réciproque en exploitant les définitions de l'image et du novau.
- Ex. 8 : a) raisonner sur des vecteurs en appliquant les définitions ; b) utiliser  $g = g \circ f \circ g$  et  $f \circ g \circ f = f$ .