TD n° 5 : Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

Reconnaître parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$A = \{(2a+b, a+b, a-2b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$; $B = \{(a, b, b-a^2) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

$C = \{(a-1, b+1, a+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2

Reconnaître parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$:

$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_n^2 = 0\}$

$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_3 + x_4 = -1\}$

$G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$

$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| = |x_2|\}$

Exercice 3

On considère les vecteurs $u = (-4, 4, 3)$, $v = (-3, 2, 1)$, $s = (-1, 2, 2)$ et $t = (-1, 6, 7)$ de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\mathrm{Vect}\{u, v\} = \mathrm{Vect}\{s, t\}$.

Exercice 4

Soient $E = \{(x+y, x+2y, x+3y, x) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et $F = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 1, -1)\}$.
a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui engendre E.
b) Déterminer $E \cap F$.

Exercice 5

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de E à deux éléments.
b) La famille trouvée est-elle libre ?

Exercice 6

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$; justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner une base. Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ le vecteur $u = (1, m, 1)$ est-il dans F ? Donner alors ses coordonnées dans la base choisie. Pour les autres valeurs de m, que peut-on dire de la famille obtenue en adjoignant u à la base de F ?

Exercice 7

Soit (u_1, u_2, u_3) une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$).
Montrer que $(u_1 + u_2, u_1 + u_3, u_2 + u_3)$ est aussi une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$.
a) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Quelles sont les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (1, 2, 1, 0), v_2 = (-1, 1, 1, 1), v_3 = (2, -1, 0, 1), v_4 = (-1, 6, 3, 0)$ et $v_5 = (4, -5, -2, 1)$.
Calculer le rang de $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ et donner une base de $E = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (3, 2, 1, 4)$, $v = (2, 2, 2, 6)$, $w = (4, 2, 0, 2)$, $t = (-1, 0, 1, 2)$ et $s = (0, 3, 2, 1)$.
Soient $E = \mathrm{Vect}\{u, v, w, t, s\}$, $F = \mathrm{Vect}\{u, v, w\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{t, s\}$.
a) Quelles sont les dimensions de E, F et G ?
b) Montrer que $t \in F$ et que $s \notin F$. En déduire la dimension de $F \cap G$.

Indications pour les exercices du TD n° 5

Ex. 1 : vérifier la définition ou exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui engendre l'ensemble ou montrer qu'une des conditions de la définition n'est pas vérifiée à l'aide d'un contre-exemple.
Ex. 2 : idem
Ex. 3 : montrer que s et t sont des combinaisons linéaires de u et v et réciproquement, puis conclure.
Ex. 4 : a) trouver deux vecteurs qui engendrent E ; b) écrire à quelles conditions $(x, y, z, t) \in F$.
Ex. 5 : a) écrire les vecteurs de E comme combinaison linéaire de 2 vecteurs ; b) utiliser la définition.
Ex. 6 : trouver une famille génératrice de F puis vérifier qu'elle est libre ; ok ; écrire u comme combinaison linéaire des vecteurs de la base ; étudier la liberté de la famille obtenue.
Ex. 7 : utiliser la définition et résoudre le système obtenu.
Ex. 8 : a) vérifier que $\mathcal{B}$ est une famille libre et conclure ; b) écrire chaque e_i comme combinaison linéaire des u_i et déterminer les coefficients en résolvant un système.
Ex. 9 : calculer le rang en utilisant la matrice des coordonnées dans la base canonique, puis, à l'aide des relations trouvées (colonnes nulles), éliminer certains vecteurs de la famille génératrice de départ pour obtenir une famille libre.
Ex. 10 : a) calculer le rang des familles de vecteurs correspondants ; b) montrer qu'on ne peut pas avoir $\dim F \cap G = 2$.

Indications pour les exercices du TD n° 5

Ex. 1 : vérifier la définition ou exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui engendre l'ensemble ou montrer qu'une des conditions de la définition n'est pas vérifiée à l'aide d'un contre-exemple.
Ex. 2 : idem
Ex. 3 : montrer que s et t sont des combinaisons linéaires de u et v et réciproquement, puis conclure.
Ex. 4 : a) trouver deux vecteurs qui engendrent E ; b) écrire à quelles conditions $(x, y, z, t) \in F$.
Ex. 5 : a) écrire les vecteurs de E comme combinaison linéaire de 2 vecteurs ; b) utiliser la définition.
Ex. 6 : trouver une famille génératrice de F puis vérifier qu'elle est libre ; ok ; écrire u comme combinaison linéaire des vecteurs de la base ; étudier la liberté de la famille obtenue.
Ex. 7 : utiliser la définition et résoudre le système obtenu.
Ex. 8 : a) vérifier que $\mathcal{B}$ est une famille libre et conclure ; b) écrire chaque e_i comme combinaison linéaire des u_i et déterminer les coefficients en résolvant un système.
Ex. 9 : calculer le rang en utilisant la matrice des coordonnées dans la base canonique, puis, à l'aide des relations trouvées (colonnes nulles), éliminer certains vecteurs de la famille génératrice de départ pour obtenir une famille libre.
Ex. 10 : a) calculer le rang des familles de vecteurs correspondants ; b) montrer qu'on ne peut pas avoir $\dim F \cap G = 2$.