TD n° 4 : Matrices et Systèmes linéaires (2)

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

Exercice 2

Discuter et résoudre, suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 2x - 2y = ax \\ -x + 3y = ay \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} (a+1)x + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + z = a+1 \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer l'inverse, lorsqu'il existe, des matrices suivantes ($a \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & a & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.

2. Résoudre le système suivant : $(S)\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$

Exercice 5

On considère la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ A_α est inversible et calculer A_α^{-1} pour ces valeurs.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est inversible et calculer son inverse en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.