TD n° 3 : Matrices et Systèmes linéaires (1)

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $(AB)C = A(BC)$ et $AB + B = (A + I_3)B$. A-t-on $AB = BA$?

Exercice 2

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer deux matrices, S symétrique et T antisymétrique, telles que : $A = S + T$.

2. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $S + T$ avec S symétrique et T antisymétrique.

Exercice 3

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose : $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

a) Montrer que E est stable par la multiplication des matrices.
b) En déduire, pour tout $A \in E$, l'expression de $A^n \quad (n \in \mathbb{N})$.
c) Soit $A \in E$, déterminer $B \in E$ telle que : $AB = BA = I_3$. Conclusion ?

Exercice 4

a) Soit J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité d'ordre 4. Calculer J^2.

b) Montrer qu'il existe 2 matrices B et C telles que : $\begin{cases} B + C = I \\ B - C = J \end{cases}$. Calculer B^2, C^2, BC, CB.

Exercice 5

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est nilpotente.

2) a) Une matrice inversible peut-elle être nilpotente ?

b) Une matrice non inversible est-elle nilpotente ? (*on pourra envisager* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et calculer* M^n *pour* $n \in \mathbb{N}$).

3) a) Si A et B sont nilpotentes, la somme $A + B$ est-elle nilpotente ? (*on pourra envisager les matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

b) Soit A et B deux matrices nilpotentes telles que $AB = BA$. Montrer que la somme $A + B$ est nilpotente.

Exercice 6

a) Soit $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) = (d_{ij}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telle que $i \neq j \Longrightarrow d_i \neq d_j$.
Déterminer $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MD = DM\}$.

b) En déduire $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ non tous nuls vérifiant : $a_0 I_3 + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0$.

b) En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}.

Exercice 8

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 + A^2 - 5A + 3I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 et $C = AB$. C est-elle inversible ? Si oui, calculer C^{-1}.

Indications pour les exercices du TD n° 3

Ex. 1 : faire les produits.
Ex. 2 : 1. chercher avec des coefficients indéterminés ; 2. raisonner par analyse-synthèse pour trouver la décomposition puis vérifier qu'elle convient.
Ex. 3 : a) vérifier que $M(a) \times M(b) \in E$; b) récurrence en utilisant b) ; c) remarquer que $M(0) = I_3$ et utiliser les résultats du a).
Ex. 4 : a) ok ; b) résoudre le système d'inconnues B et C sans introduire les coefficients des matrices.
Ex. 5 : 1) calculer A^2 et A^3 ; 2)a) A^p est inversible pour tout p donc... ; 2)b) ok ; 3)a) utiliser l'indication et 2)a) ; 3)b) binôme de Newton.
Ex. 6 : a) utiliser la formule du produit et $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$; b) utiliser a), pour montrer que M est diagonale, puis scalaire en utilisant $A = (a_{ij})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $j \geqslant 2$, $a_{11} = 0$ et $a_{i1} = 1$ si $i \geqslant 2$.
Ex. 7 : a) montrer que $n = 3$ en montrant qu'il n'existe pas de relation du type voulu pour $n = 0, 1, 2$; b) à l'aide de a), trouver une relation du type $AB = BA = I_3$.
Ex. 8 : a) trouver une relation du type $AB = BA = I_3$; b) montrer que B est inversible puis C comme produit et calculer C^{-1} comme inverse d'un produit.